Ερωτήσεις κρίσης – Κρυμμένα λάθη

(απόσπασμα από το αντίστοιχο κεφάλαιο στο βιβλίο)

1) Γνωρίζουμε ότι για $x>0$ ισχύει $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$. Επίσης από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε $\frac{d}{dx}\ln(2x)=\frac{1}{2x}(2x)'=\frac{1}{2x}\cdot 2=\frac{1}{x}$. Με άλλα λόγια οι συναρτήσεις $\ln x$ και $\ln(2x)$ έχουν την ίδια παράγωγο.

Πώς ερμηνεύεται αυτό; Πώς είναι δυνατόν να έχουμε δύο διαφορετικές συναρτήσεις και όμως να έχουν την ίδια παράγωγο;

Απάντηση Δύο συναρτήσεις που διαφέρουν κατά σταθερά έχουν την ίδια παράγωγο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε $\ln(2x)=\ln 2+\ln x$, οπότε $\ln(2x)$ και $\ln x$ πραγματικά διαφέρουν κατά σταθερά, την $\ln 2$. Οπότε είναι αναμενόμενο να έχουν την ίδια παράγωγο.

2) Ένας μαθητής βρήκε το ολοκλήρωμα $\int \frac{εφx}{συν^2x}dx$ λέγοντας

$$\int \frac{εφx}{συν^2x}dx=\int εφx(εφx)'\,dx=\frac{1}{2}εφ^2x+c.$$

Ένας δεύτερος έγραψε

$$\int \frac{εφx}{συν^2x}dx=\int \frac{ημx}{συν^3x}dx=-\int (συνx)^{-3}(συνx)'\,dx=\frac{1}{2}(συνx)^{-2}+c.$$

Ποιος έχει δίκιο;

Απάντηση Και οι δυο απαντήσεις είναι σωστές. Διαφέρουν μόνο φαινομενικά. Πραγματικά

$$\frac{1}{2}(συνx)^{-2}+c=\frac{1}{2}\frac{1}{συν^2x}+c=\frac{1}{2}\frac{ημ^2x+συν^2x}{συν^2x}+c=\frac{1}{2}\left(εφ^2x+1\right)+c=\frac{1}{2}εφ^2x+\left(\frac{1}{2}+c\right).$$

Αυτό σημαίνει ότι η απάντηση του δεύτερου μαθητή είναι ίδια με του πρώτου, μόνο που η σταθερά άλλαξε μορφή. Θα μπορούσε να είχε γράψει την απάντηση του στη μορφή $\frac{1}{2}(συνx)^{-2}+c'$.

3) Ένας μαθητής άκουσε από έναν φίλο του ότι αν x γωνία σε <u>μοίρες</u> (και όχι σε ακτίνια όπως συνηθίζεται) τότε δεν είναι αλήθεια ότι $(ημx)'=συνx$ και, ειδικά, δεν είναι αλήθεια ότι $\lim_{x\to 0}\frac{ημx}{x}=1$.

Στην προσπάθειά του να ερευνήσει το θέμα έβαλε στο κομπιουτεράκι του διάφορες μικρές τιμές του x, σε μοίρες, για να ελέγξει αν $\frac{ημx}{x}\approx 1$ ή όχι. Έτσι έβαλε πρώτα $x=1^\circ$, μετά $x=0{,}1^\circ$ και κατόπιν $x=0{,}01^\circ$. Βρήκε διαδοχικά $\frac{ημ1^\circ}{1}\approx 0{,}017452406...$, $\frac{ημ0{,}1^\circ}{0{,}1}\approx 0{,}017453283...$, $\frac{ημ0{,}01^\circ}{0{,}01}\approx 0{,}017453292...$ Για ακόμα μικρότερες τιμές του x συνέχεια εύρισκε παρόμοια απάντηση, περί το $0{,}0174532...$, που απέχει πολύ από το 1. Ποιος είναι ο περίεργος αυτός αριθμός $0{,}0174532...$; Τι συμβαίνει εδώ;

Απάντηση Αν κατά τύχη ή μετά από σκέψη πολλαπλασίαζε ο μαθητής τον αριθμό $0{,}0174532...$ επί 180 θα έβρισκε $3.141592638...$ τον οποίο θα αναγνώριζε ως π. Δηλαδή, από ότι φαίνεται, το κομπιουτεράκι δείχνει ότι για γωνίες x° (x μοίρες),

ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημx^{\circ}}{x}=\frac{π}{180}$. Φυσικά ο έλεγχος με το κομπιουτεράκι δεν είναι απόδειξη και οφείλει κανείς να χρησιμοποιήσει τις ακριβείς μεθόδους των Μαθηματικών για να αποδείξει πέρα από κάθε αμφιβολία την υποψία του, ότι η ισότητα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημx^{\circ}}{x}=\frac{π}{180}$ (x σε μοίρες) είναι αληθής. Επίσης πρέπει να αναρωτηθεί γιατί στην ισότητα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημx}{x}=1$ που γνώριζε μέχρι τώρα, το x πρέπει να είναι σε ακτίνια. Ειδικά, αφού το σχολικό βιβλίο έχει απόδειξη της ισότητας αυτής, ο μαθητής οφείλει να κατανοήσει σε ποιο ακριβώς σημείο της υπεισέρχονται τα ακτίνια.
Η απάντηση στο τελευταίο ερώτημα είναι η εξής: Η απόδειξη του σχολικού βιβλίου βασίζεται σε ένα γεωμετρικό επιχείρημα όπου με σύγκριση τριών εμβαδών (ενός κυκλικού τομέα και δύο τριγώνων) βγαίνει το συμπέρασμα ότι (για $0<x<\frac{π}{2}$) ισχύει $ημx<x<εφx$.
Η χρήση των ακτινίων είναι σε αυτό ακριβώς το βήμα, όπου χρησιμοποιείται ο τύπος για το εμβαδόν κυκλικού τομέα. Ο τύπος αυτός λέει ότι το εμβαδόν κυκλικού τομέα, ΟΤΑΝ Η ΓΩΝΙΑ ΤΟΥ θ ΕΙΝΑΙ ΣΕ ΑΚΤΙΝΙΑ, δίνεται από τον τύπο $E=\frac{1}{2}R^2θ$, όπου R η ακτίνα του κύκλου. Ως μικρό έλεγχο του τύπου ας δούμε την περίπτωση όπου ο κυκλικός τομέας είναι ολόκληρος ο κύκλος, δηλαδή όταν (σε ακτίνια) $θ=2π$. Τότε ο τύπος δίνει $E=\frac{1}{2}R^2 2π=πR^2$, δηλαδή τον γνωστό μας τύπο εμβαδού κύκλου ακτίνας R.
Ας επιστρέψουμε στο όριο που συζητάμε. Αν μια γωνία έχει μέτρο x^{o} τότε, ως γνωστόν, έχει μέτρο $\frac{πx}{180}$ ακτίνια. Έτσι

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημx^{\circ}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ημ\frac{πx}{180}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{π}{180}\,\frac{ημ\frac{πx}{180}}{\frac{πx}{180}}\overset{y=\frac{πx}{180}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{π}{180}\,\frac{ημy}{y}=\frac{π}{180}\cdot 1=\frac{π}{180},$$

όπως θέλαμε.

4) Για να βρει ένας μαθητής το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ έκανε τις εξής σκέψεις:

Αφού όταν $x\to\infty$ ισχύει $\frac{1}{x}\to 0$ έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}(1+0)^x=\lim_{x\to+\infty}1^x=\lim_{x\to+\infty}1=1.$$

Από την άλλη ξέρουμε ότι για το ίδιο όριο έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\approx 2,71828$. Άλλωστε μπορούμε να επιβεβαιώσουμε με κομπιουτεράκι ότι για «μεγάλα» x έχουμε π.χ.

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}\approx 2,70481,\quad \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}\approx 2,71692,\quad \left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000}\approx 2,71814$$

Τι δεν πάει καλά;

Απάντηση Όταν παίρνουμε το όριο μιας παράστασης δεν επιτρέπεται να παίρνουμε το όριο κάποιων όρων της και να αφήνουμε τους υπόλοιπους για αργότερα. Ειδικά, όταν παίρνουμε όριο, δεν πρέπει να υπάρχει καμία εμφάνιση της μεταβλητής μετά τη λήψη του ορίου. Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει κάπως πιο φανερά ότι η εσφαλμένη αυτή λογική μπορεί να μας οδηγήσει σε σφάλματα: Έχουμε $\lim\limits_{x\to0} x\cdot\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to0} 0\cdot\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to0} 0 = 0$ (ΛΑΘΟΣ!) ενώ $\lim\limits_{x\to0} x\cdot\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to0} 1 = 1 \neq 0$ (ΣΩΣΤΟ!)

5) Ένας μαθητής εργαζόμενος με ολοκλήρωση κατά παράγοντες είπε:

$$I = \int e^{-x}e^{x}dx = \int e^{-x}(e^{x})'dx = e^{-x}e^{x} - \int(-e^{-x})e^{x}dx = 1 + \int e^{-x}e^{x}dx = 1 + I$$

Άρα $I = 1 + I$, οπότε $0 = 1$. Τι δεν πάει καλά;

Απάντηση Στην άλγεβρα έχουμε δει ότι π.χ. αν $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$ τότε $\beta=\gamma$. Ο τρόπος που δείχνουμε αυτό το (σωστό) αποτέλεσμα είναι με πρόσθεση του $-\alpha$ και στα δύο μέλη, οπότε έχουμε $\cancel{\alpha}+\beta-\cancel{\alpha}=\cancel{\alpha}+\gamma-\cancel{\alpha}$, δηλαδή $\beta=\gamma$.

Αν πάμε να μιμηθούμε αυτή την απόδειξη στην περίπτωση που το α είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα I με $I+\beta=I+\gamma$ και προσθέσουμε το $-I$ στα δύο μέλη θα προκύψει $I+\beta-I=I+\gamma-I$. Αλλά πόσο κάνει το $I-I$;

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι το I είναι αόριστο ολοκλήρωμα, $I=\int f(x)dx$. Αυτό σημαίνει ότι θα μπορούσε να είναι οποιαδήποτε αντιπαράγωγος F της f, δηλαδή οποιασδήποτε F με $F'=f$. Τέτοιες αντιπαράγωγοι διαφέρουν κατά σταθερά, οπότε ο σωστός συλλογισμός είναι:

$$I-I=(F+c_1)-(F+c_2)=c_1-c_2=c.$$

Δηλαδή δεν πρέπει να γράφουμε $I-I=0$ αλλά $I-I=c$. Ισοδύναμα από την $I+\beta=I+\gamma$ προκύπτει $\beta=\gamma+c$. Στο παραπάνω, προκύπτει $0=1+c$, που είναι πράγματι αληθές αν $c=-1$.

6) Που είναι το λάθος στον ακόλουθο συλλογισμό, ο οποίος φαίνεται να δείχνει ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί είναι ίσοι με 0;

Έστω a τυχαίος πραγματικός αριθμός και έστω λ οποιαδήποτε λύση της εξίσωσης $\lambda^2 - a\lambda = -\frac{1}{3}a^2$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη επί -3a παίρνουμε $-3\lambda^2 a + 3a^2\lambda = a^3$. Προσθέτοντας τώρα $\lambda^3 - a^3$ και στα δύο μέλη έπεται οτι $\lambda^3 - 3\lambda^2 a + 3a^2\lambda - a^3 = \lambda^3$, ισοδύναμα $(\lambda-a)^3=\lambda^3$. Όμως η συνάρτηση x^3 είναι 1-1 (άλλωστε είναι γνήσια αύξουσα). Συνεπώς $\lambda-a=\lambda$ και άρα a=0. Δηλαδή ο τυχαίος πραγματικός αριθμός a ισούται με 0.

Απάντηση Εύκολα βλέπει κανείς ότι, αν a ≠ 0, η αρχική δευτεροβάθμια εξίσωση $\lambda^2 - a\lambda = -\frac{1}{3}a^2$ έχει αρνητική διακρίνουσα. Άρα τα λ που την ικανοποιούν είναι *μιγαδικοί* αριθμοί και η ισότητα $(\lambda-a)^3=\lambda^3$ είναι ισότητα μιγαδικών. Στο $\mathbb{C}$ όμως η συνάρτηση z^3 δεν είναι 1-1 (παραδείγματος χάριν υπάρχουν τρεις διαφορετικοί αριθμοί που ο κύβος τους είναι 1) ούτε έχει νόημα ο ισχυρισμός ότι η z^3 «είναι γνήσια αύξουσα». Εκεί ακριβώς είναι το σφάλμα στον προηγούμενο συλλογισμό καθώς μεταφέρει άκριτα τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών στους μιγαδικούς. Το μόνο που μπορούμε να συμπεράνουμε είναι ότι, αν ω μιγαδικός αριθμός με $\omega^3 = 1$ (υπάρχουν τρεις τέτοιοι, ο 1 και οι $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}i)$) τότε η $(\lambda-a)^3=\lambda^3$ δίνει $\lambda-a=\lambda\omega$. Η τελευταία οδηγεί στις ίδιες τιμές του λ με αυτές που δίνει η αρχική εξίσωση.

7) Σύμφωνα με τον κανόνα του de l' Hospital, αν έχουμε δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$ και το $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει, τότε θα υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ και θα ισούται με το προηγούμενο. Αν τώρα εφαρμόσουμε τον κανόνα στις $f,g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με f(x) = 1 + x + ημxσυνx, g(x) =

(x + ημxσυνx)$e^{ημx}$ εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$. Επίσης $f'(x)=$ (1 + x + ημxσυνx)' = 1 + συν^{2}x - ημ^{2}x = 2 συν^{2}x και όμοια $g'(x)=$ (2 συνx + x + ημx)(συνx)$e^{ημx}$. Άρα

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2συν^2x}{(2συνx+x+ημx)(συνx)e^{ημx}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2συνx}{(2συνx+x+ημx)e^{ημx}} \qquad (*)$$

Το τελευταίο όριο εύκολα αποδεικνύεται ότι υπάρχει και ισούται με 0 (διότι οι ημx, συνx και $e^{ημx}$ είναι φραγμένες). Θα έπρεπε λοιπόν, από τον κανόνα του de l' Hospital, να ισχύει $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=$ 0. Όμως έχουμε $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1+x+ημxσυνx}{(x+ημxσυνx)e^{ημx}}$ οπότε $e^{-ημx}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{x+ημxσυνx}{1+x+ημxσυνx}$ συνεπώς θα ίσχυε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} e^{-ημx} &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{x+ημxσυνx}{(1+x+ημxσυνx)}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x+ημxσυνx}{(1+x+ημxσυνx)}\\ &=0\cdot 1=0\end{aligned}$$

Από την άλλη είναι εύκολο να δείξουμε ότι η $e^{-ημx}$ δεν συγκλίνει καθώς $x\to\infty$ (η συνάρτηση ταλαντεύεται μεταξύ e^{-1} και e). Τι δεν πάει καλά;

Απάντηση Το πρόβλημα είναι στον μεσαίο όρο της (*), όπου για κάποια F αναζητάμε το όριο $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$. Υπενθυμίζουμε ότι στον ορισμό του ορίου στο άπειρο μιας συνάρτησης, απαιτείται η συνάρτηση να ορίζεται σε τουλάχιστον ένα διάστημα της μορφής (α, ∞). Η εν λόγω συνάρτηση, επειδή έχει τον όρο «συνx» στον παρανομαστή, δεν ορίζεται στα κπ + π/2 (όπου κ $\in\mathbb{Z}$). Συνεπώς δεν υπάρχει διάστημα της μορφής (α, ∞) στο οποίο να ορίζεται η F και άρα δεν έχει νόημα η παράσταση $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$. Με άλλα λόγια δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ και ο κανόνας του de l' Hospital δεν εφαρμόζεται.

Ας προσθέσουμε εδώ ότι το όριο στον τρίτο όρο της (*) δεν παρουσιάζει πρόβλημα και τιμή 0 που βρήκαμε, είναι σωστή. Στον τρίτο όρο το «συνx» του αριθμητή και του παρονομαστή του δεύτερου όρου έχει απλοποιηθεί. Όμως η ισότητα από τον δεύτερο όρο στον τρίτο δεν είναι ορθή γιατί τον μεν ένα όριο υπάρχει το δε άλλο δεν έχει νόημα.