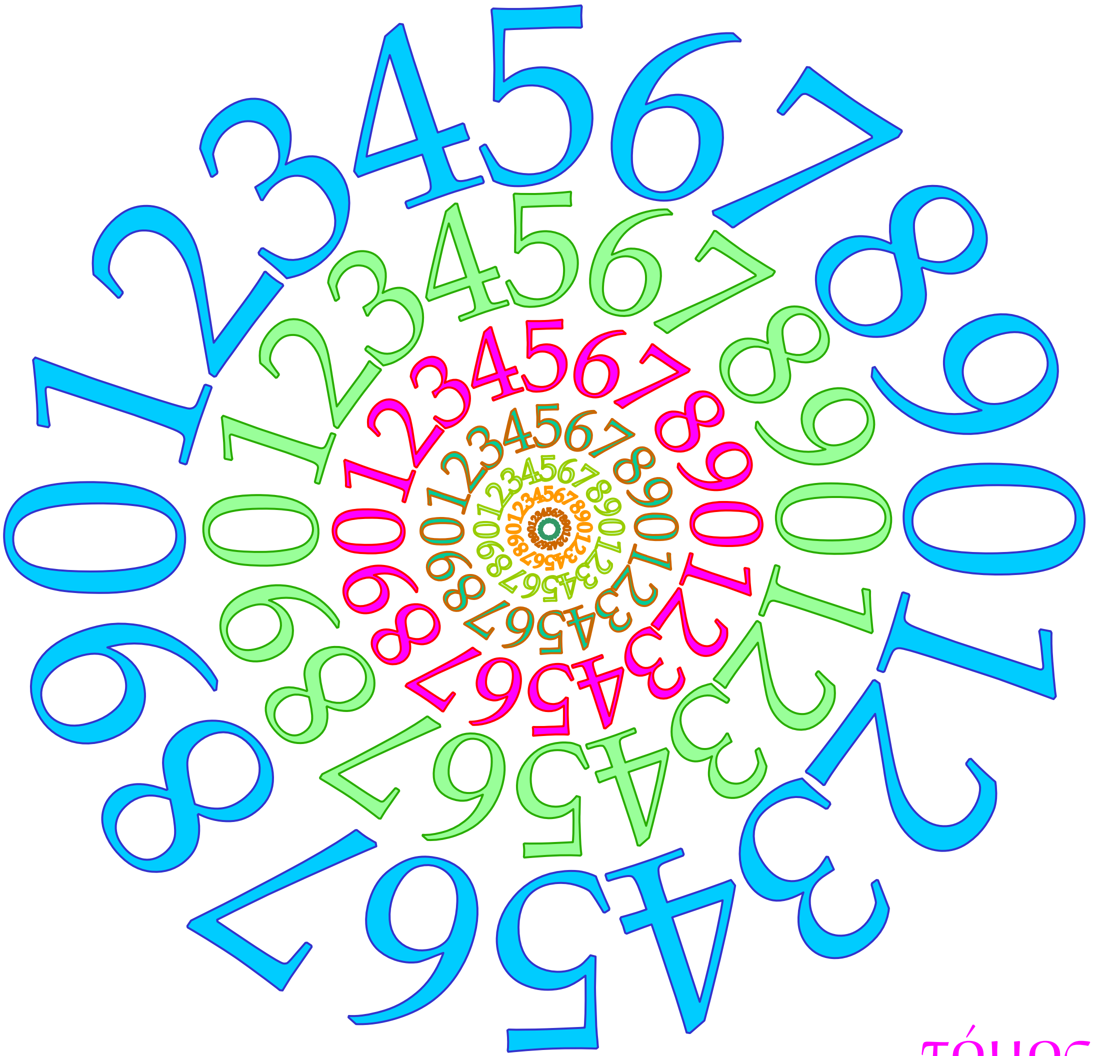
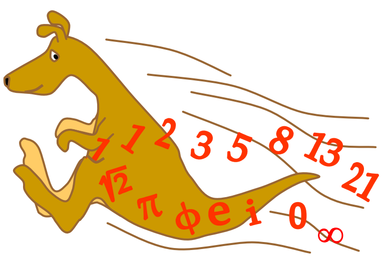
Μιχάλης Λάμπρου – Νίκος Κ. Σπανουδάκης



τόμος 6

Καγκουρό: Μαθηματικά για όλους



Εκτύπωση: ΤΥΠΟΚΡΕΤΑ

ISBN: 978 – 960 – 89703 – 6 – 6

Πρόλογος

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας είναι αφιερωμένο στα Μαθηματικά. Σκοπός του είναι να παρουσιάσει τα Μαθηματικά ως ευχάριστο πνευματικό παιχνίδι και να καλλιεργήσει στους μαθητές την αυτενέργεια και ανεξάρτητη σκέψη. Απευθύνεται σε μαθητές από την Β΄ Δημοτικού έως την Γ΄ Λυκείου αλλά οποιοσδήποτε αναγνώστης, ανεξάρτητα από την ηλικία ή την ιδιότητα του, θα βρει ενδιαφέροντα άρθρα και προβλήματα. Ειδικά, οι εκπαιδευτικοί και οι γονείς θα βρουν υλικό που θα τους βοηθήσει να ενθαρρύνουν τους μαθητές να ανακαλύπτουν συλλογισμούς από μόνοι τους και να τους καθοδηγούν πέρα από τον δρόμο της στείρας αποστήθισης.

Το πρώτο μέρος του βιβλίου αναφέρεται στο Διαγωνισμό «Καγκουρό». Λεπτομέρειες για τη διοργάνωση του διαγωνισμού μπορείτε να διαβάσετε στην επόμενη σελίδα. Εδώ περιέχονται τα 144 θέματα (πέντε επιπέδων) που δόθηκαν στο διαγωνισμό το έτος 2012, ενώ στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν οι λύσεις τους. Τα περισσότερα θέματα μπορούν να συζητηθούν σε μία τάξη ή να απασχολήσουν δημιουργικά έναν που διαβάζει μόνος του. Οι λύσεις είναι γραμμένες με σαφήνεια και είναι αξιοποιήσιμες από τον δάσκαλο ή τον γονέα που επιθυμεί να διδάξει τους νέους να σκέπτονται.

Τα ερωτήματα που τίθενται στον διαγωνισμό «Καγκουρό» δεν απαιτούν ειδικές γνώσεις μαθηματικών για τη λύση τους. Αρκετά από αυτά μπορούν να λυθούν χωρίς μαθηματικές γνώσεις, με μόνο εφόδιο την κοινή λογική. Το κύριο χαρακτηριστικό των θεμάτων είναι η απλότητα, η πρωτοτυπία και το διασκεδαστικό στοιχείο που τα συνοδεύει. Ακόμα και ένας μαθητής Λυκείου μπορεί να βρει ενδιαφέρονται τα ερωτήματα που απευθύνονται σε μαθητές Δημοτικού. Αντίστροφα, ενθαρρύνουμε τους μαθητές να ασχοληθούν και με θέματα που απευθύνονται σε μαθητές μεγαλύτερων τάξεων.

Το δεύτερο μέρος του βιβλίου περιέχει άρθρα - ασκήσεις - προβλήματα κατανεμημένα ανά τάξη, από την Β΄ Δημοτικού μέχρι την Γ΄ Λυκείου. Τα κείμενα περιέχουν ασκήσεις πιο ελκυστικές και πιο ασυνήθιστες από τις αντίστοιχες των σχολικών βιβλίων. Η ιδέα είναι να ξεφύγει κανείς από την στείρα ασκησιολογία αλλά, συγχρόνως, να έχει ο μαθητής την ευκαιρία να επιλύσει προβλήματα τα οποία θα του αυξήσουν την κατανόηση των Μαθηματικών. Επίσης, προτρέπουμε τον αναγνώστη να μην ασχοληθεί μόνο με τα άρθρα που απευθύνονται στην τάξη του αλλά να μελετήσει και τα θέματα τόσο των μικρότερων όσο και των μεγαλύτερων τάξεων.

Τμήμα του βιβλίου περιέχει διασκεδαστικά μαθηματικά και, εν γένει, ελκυστικό περιεχόμενο. Η ιδέα είναι να παρουσιάζονται τα Μαθηματικά ως παιχνίδι, όπως ακριβώς προτρέπει ο Πλάτων στους *Νόμους* του όταν λεει ότι *«μανθάνειν δειν τους ελεύθερους όσος πάμπολυς εν Αιγύπτω παίδων όχλος άμα γράμμασι μανθάνει […] και λογισμούς […] μετά παιδιάς και ηδονής».*

Το παρόν είναι ο έκτος τόμος μιας σειράς αντίστοιχων βιβλίων η οποία συμπληρώνεται με έναν τόμο κάθε χρόνο.

Οι συγγραφείς

Μιχαήλ Λάμπρου
Καθηγητής στο Τμήμα Μαθηματικών
του Πανεπιστημίου Κρήτης

Νίκος Κ. Σπανουδάκης
Καθηγητής στο Πρότυπο Πειραματικό
Γυμνάσιο Ηρακλείου

Διεθνής Μαθηματικός Διαγωνισμός "Καγκουρό"

Ο δημοφιλής διεθνής διαγωνισμός «Καγκουρό» είναι ο μεγαλύτερος εκπαιδευτικός διασκεδαστικός διαγωνισμός στον κόσμο, με συμμετοχή πάνω από 6 εκατομμύρια μαθητές από 43 χώρες. Η ιδέα ξεκίνησε το 1993 όταν εκπρόσωποι από την Γαλλία, Ρωσία, Ουγγαρία, Λευκορωσία, Ολλανδία, Πολωνία, Ρουμανία και Ισπανία, με μεγάλη πείρα σε διεθνείς μαθηματικούς διαγωνισμούς, αποφάσισαν να διοργανώσουν έναν διαγωνισμό ο οποίος θα απευθυνόταν σε όλους τους μαθητές και όχι μόνο σε εκείνους που έχουν ιδιαίτερη κλίση στα μαθηματικά. Η αρχή με την οποία κινήθηκαν ήταν η διαπίστωση ότι τα μαθηματικά είναι μία κουλτούρα η οποία πρέπει να παρέχεται σε όλους. Ειδικά, επειδή τα μαθηματικά καλλιεργούν την σκέψη και φέρνουν πνευματική ικανοποίηση, *δεν πρέπει να απευθύνονται μόνο σε λίγους*.

Ένα χρόνο αργότερα, το 1994, οι πρώτοι εκπρόσωποι ίδρυσαν τον μη κερδοσκοπικό διεθνή οργανισμό **Kangourou Sans Frontières** (Καγκουρό Χωρίς Σύνορα) με έδρα το Παρίσι. Η Ελλάδα έγινε μέλος τον Οκτώβριο του 2006. Σήμερα είναι μέλη σχεδόν όλες οι Ευρωπαϊκές χώρες, οι ΗΠΑ, και χώρες της Ασίας και Λατινικής Αμερικής. Ο βασικός στόχος του οργανισμού είναι η προώθηση των μαθηματικών με διασκεδαστικό τρόπο, χωρίς φυλετικές ή κοινωνικές διακρίσεις. Επίσης, με αφορμή τον διαγωνισμό, παράγεται ενδιαφέρον εκπαιδευτικό υλικό που προάγει την γνώση, διαχέει την πληροφορία και καλλιεργεί την σκέψη.

Οι χώρες που συμμετέχουν στον διαγωνισμό δεν ανταγωνίζονται μεταξύ τους, ούτε γίνονται συγκρίσεις των αποτελεσμάτων. Ωστόσο, τα θέματα κατασκευάζονται από κοινού από τους εκπροσώπους των χωρών μελών, κατά την ετήσια συνάντησή τους. Οι διαγωνιζόμενοι γράφουν σε κοινά θέματα αλλά με μικρές αποκλίσεις, οι οποίες οφείλονται στις εκπαιδευτικές ιδιαιτερότητες κάθε χώρας μέλους. Σε κάθε χώρα τα θέματα είναι προσαρμοσμένα στο εθνικό τους αναλυτικό πρόγραμμα και είναι απολύτως συμβατά με το εκπαιδευτικό τους σύστημα.

Το σημαντικό χαρακτηριστικό του διαγωνισμού «Καγκουρό» είναι ότι επιβραβεύεται μεγάλος αριθμός διαγωνιζομένων. Πρώτιστα *όλοι ανεξαιρέτως οι μαθητές* λαμβάνουν δώρα με εκπαιδευτικό περιεχόμενο, ανεξάρτητα από την επίδοσή τους (το 2012 ένα από αυτά είναι το παρόν βιβλίο, ενώ κάθε χρόνο γράφεται νέος τόμος). Επιπλέον, ένας στους έξι μαθητές κερδίζει επιπρόσθετα συμβολικά βραβεία με βάση την επίδοσή του. Η ιδέα είναι να καλλιεργηθεί η ευγενής άμιλλα μεταξύ των διαγωνιζομένων και να γίνει κατανοητό ότι αγωνίζονται για μία δάφνη και μόνο.

Στον ετήσιο μαθηματικό διαγωνισμό «Καγκουρό» μπορούν να λάβουν μέρος όλοι οι μαθητές από την Γ΄ Δημοτικού μέχρι την Γ΄ Λυκείου. Υπάρχουν έξι διαφορετικά επίπεδα θεμάτων, ανάλογα με την τάξη του μαθητή. Αυτά είναι ως εξής:

Επίπεδο Β΄ τάξης Δημοτικού,
Επίπεδο 1: απευθύνεται σε μαθητές της Γ΄ και Δ΄ τάξης Δημοτικού,
Επίπεδο 2: απευθύνεται σε μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης Δημοτικού,
Επίπεδο 3: απευθύνεται σε μαθητές της Α΄ και Β΄ τάξης Γυμνασίου,
Επίπεδο 4: απευθύνεται σε μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ τάξης Λυκείου.
Επίπεδο 5: απευθύνεται σε μαθητές της Β΄ και Γ΄ τάξης Λυκείου.

Ο διαγωνισμός διαρκεί 1 ώρα και 30 λεπτά και είναι σε μορφή πολλαπλής επιλογής. Τα θέματα είναι γενικά βατά. Υπάρχουν 30 ερωτήσεις (εκτός από το Επίπεδο Β΄ Δημοτικού όπου οι ερωτήσεις είναι 21 και το Επίπεδο 1 όπου οι ερωτήσεις είναι 24) κλιμακούμενης δυσκολίας. Το πρώτο ένα τρίτο των ερωτήσεων (που βαθμολογούνται από 3 μονάδες η καθεμία) είναι ιδιαίτερα εύκολες. Το επόμενο ένα τρίτο (που βαθμολογούνται από 4 μονάδες η καθεμία) είναι επίσης αρκετά εύκολες, και το τελευταίο ένα τρίτο (που βαθμολογούνται από 5 μονάδες η καθεμία) κατά τι δυσκολότερες. Οι περισσότερες ερωτήσεις είναι πρωτότυπες και πολλές διατυπώνονται με διασκεδαστικό τρόπο. Δεν απαιτούνται ειδικές γνώσεις για να απαντηθούν οι ερωτήσεις. Οι γνώσεις των μαθητών μέσα στην τάξη τους, ο κοινός νους και η αγάπη για τα Μαθηματικά είναι αρκετά εφόδια για τον διαγωνισμό.

Περισσότερες πληροφορίες και άλλο εκπαιδευτικό υλικό παρέχονται στην ιστοσελίδα

www.kangaroo.gr

περιεχόμενα

(ο πρώτος αριθμός σε μια γραμμή αναφέρεται στη σελίδα που αρχίζει το άρθρο και ο δεύτερος στη σελίδα που υπάρχουν οι απαντήσεις)


EUROPA
CEPT
ITALIA
ARCHIMEDE
500
I.P.Z.S.-ROMA-1983
E. DONNINI

Θέματα Καγκουρό 2012

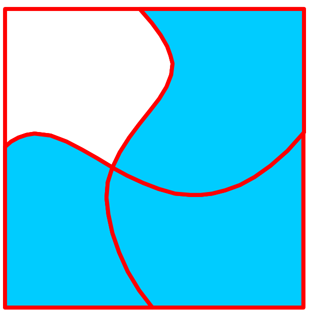
για μαθητές της Β' τάξης Δημοτικού

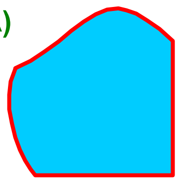
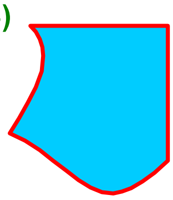
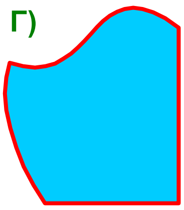
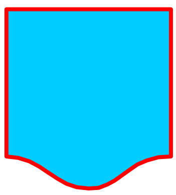
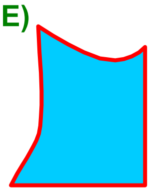
Ερωτήσεις 3 πόντων:

1) Πόσα ζώα, μικρά και μεγάλα, έχει η εικόνα;

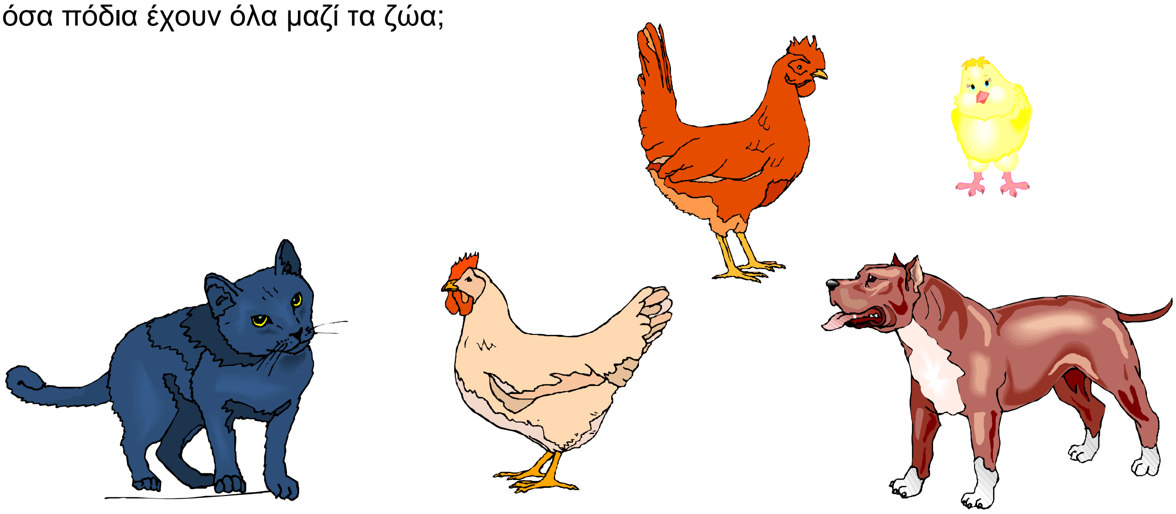
Α) 3 **Β)** 4 **Γ)** 5 **Δ)** 6 **Ε)** 7

2) Ποιο κομμάτι μπαίνει στο άδειο μέρος της εικόνας;



Α) 
Β) 
Γ) 
Δ) 
Ε) 

3) Πόσα πόδια έχουν όλα μαζί τα ζώα;



Α) 5 **Β)** 10 **Γ)** 12 **Δ)** 14 **Ε)** 20

4) Η Αθηνά έγραψε δύο φορές τη λέξη ΚΑΓΚΟΥΡΟ. Πόσες φορές έγραψε το γράμμα Κ;

Α) 1 **Β)** 2 **Γ)** 3 **Δ)** 4 **Ε)** 6

---

5) Ο Έκτορας ζωγραφίζει τις ίδιες 4 εικόνες ξανά και ξανά. Τις ζωγραφίζει πάντα με την ίδια σειρά. Ποια είναι η δέκατη εικόνα;

Α)  **Β)**  **Γ)**  **Δ)**  **Ε)** 

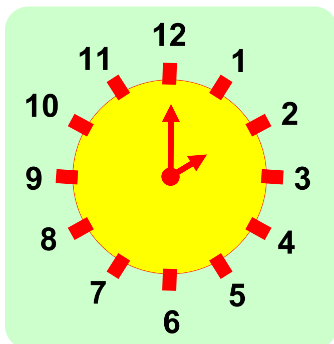
---

6) Την Παρασκευή ο Άρης άρχισε να γράφει τη λέξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. Κάθε μέρα γράφει από ένα γράμμα. Τι μέρα θα γράψει το τελευταίο γράμμα;

Α) Κυριακή **Β)** Τρίτη **Γ)** Τετάρτη **Δ)** Πέμπτη **Ε)** Παρασκευή

---

7) Το ρολόι δείχνει την ώρα που τέλειωσε το σχολείο σήμερα. Το μάθημα της Αριθμητικής είχε τελειώσει 3 ώρες νωρίτερα. Τι ώρα τέλειωσε το μάθημα της Αριθμητικής;



Α) 1 **Β)** 2 **Γ)** 5 **Δ)** 11 **Ε)** 12

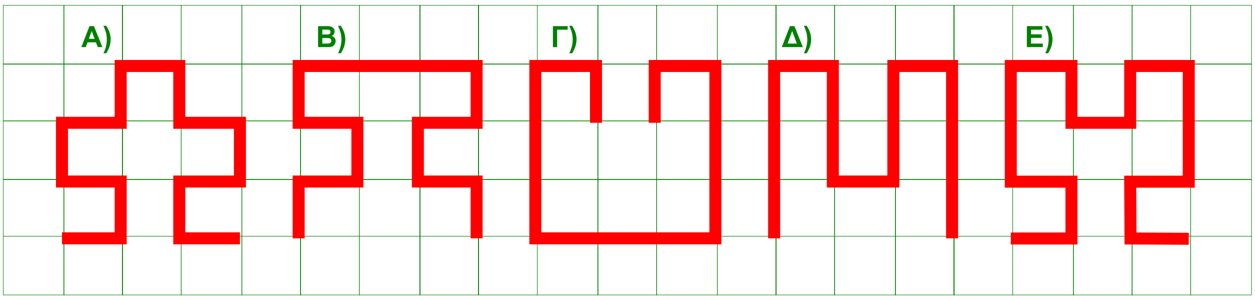
Ερωτήσεις 4 πόντων:

8) Ποιο από τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ υπάρχει περισσότερες φορές στη παρακάτω σειρά;

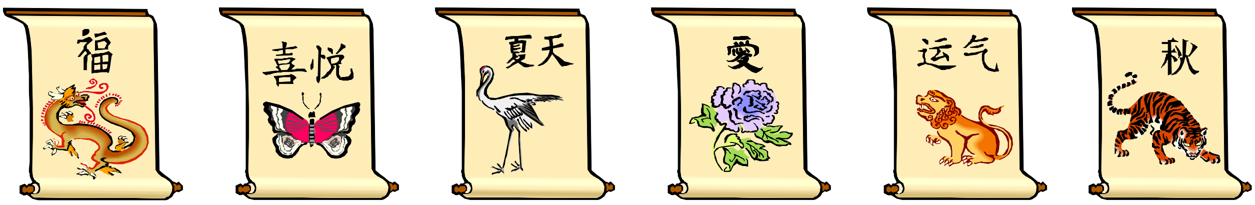
ΑΒΓΔΑΒΓΔΑΒΓΔΑΒΓΔΑΒΓΔΑΒΓΔΑΒΓΔΑΒΓΔΑΒΓΔΑ

Α) Το Α **Β)** Το Β **Γ)**) το Γ **Δ)** Το Δ **Ε)** όλα υπάρχουν τις ίδιες φορές

9) Ποια από τις παρακάτω κόκκινες γραμμές είναι η μεγαλύτερη;



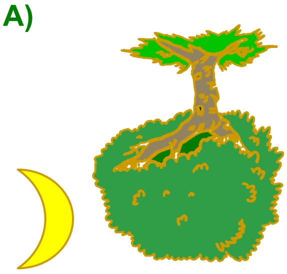
10) Ο Θωμάς κοιτάει έξι κινέζικες ζωγραφιές. Με τη σειρά περιέχουν δράκο, πεταλούδα, πουλί, λουλούδι, λιοντάρι και τίγρη.



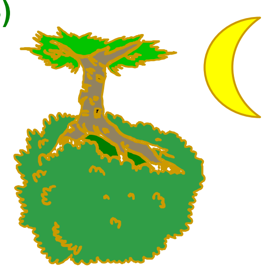
Τι ζώο βλέπει δεξιά της πεταλούδας και αριστερά του λιονταριού;

11) Η Αθηνά κάθεται στην όχθη του ποταμού. Ποια εικόνα βλέπει να καθρεφτίζεται μέσα στο ποτάμι;

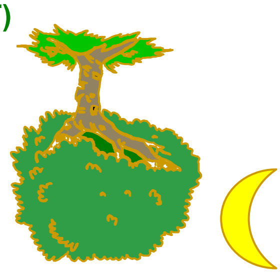
Α)



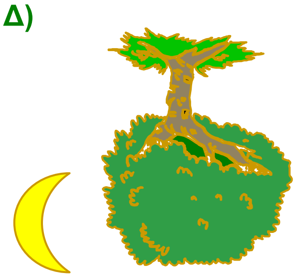
Β)



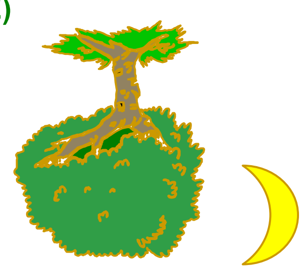
Γ)



Δ)



Ε)



12) Στη τάξη βρίσκονται 13 άτομα. Το ένα άτομο είναι η Δασκάλα και τα υπόλοιπα είναι οι μαθητές και οι μαθήτριες της τάξης. Τα αγόρια της τάξης είναι 9. Πόσες είναι οι μαθήτριες της τάξης;

Α) 3 **Β)** 4 **Γ)** 5 **Δ)** 9 **Ε)** 22

13) Σήμερα η Άρτεμις πρόσθεσε την ηλικία της στην ηλικία της αδελφής της. Βρήκε άθροισμα 10. Πόσο θα είναι το άθροισμα των ηλικιών τους σε ένα χρόνο;

Α) 5 **Β)** 10 **Γ)** 11 **Δ)** 12 **Ε)** 20

14) Η Άννα έβαλε 12 βιβλία στο τραπέζι, η Βάσω έβαλε 9 και η Γιάννα δεν έβαλε κανένα βιβλίο. Μετά οι τρεις μοιράστηκαν τα βιβλία στο τραπέζι και η καθεμία πήρε τον ίδιο αριθμό από βιβλία. Πόσα βιβλία πήρε η καθεμία;

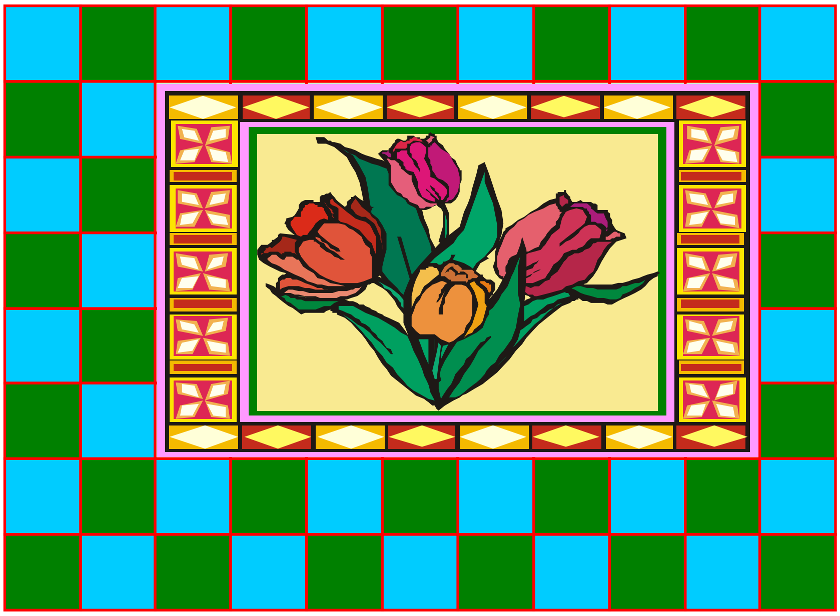
Α) 3 **Β)** 7 **Γ)** 8 **Δ)** 9 **Ε)** 12

Ερωτήσεις 5 πόντων:

15) Η Λερναία Ύδρα έχει 3 κεφάλια. Όταν της κόψουν ένα κεφάλι, τότε φυτρώνουν 3 καινούργια. Ο Ηρακλής της έκοψε ένα κεφάλι και μετά άλλο ένα. Πόσα κεφάλια έχει τώρα η Λερναία Ύδρα;

Α) 4 **Β)** 5 **Γ)** 6 **Δ)** 7 **Ε)** 8

16) Το πάτωμα έχει εναλλάξ γαλάζια πλακάκια και πράσινα πλακάκια. Μερικά πλακάκια σκεπάστηκαν από το χαλί, όπως στην εικόνα. Πόσα γαλάζια πλακάκια σκεπάστηκαν;



Α) 16 **Β)** 18
Γ) 20 **Δ)** 22
Ε) 24

17) Τα 4 σκυλάκια της Άννας ζυγίζουν όσο τα 6 γατάκια της. Όλα μαζί τα σκυλάκια και τα γατάκια ζυγίζουν 24 κιλά. Πόσο ζυγίζει το κάθε γατάκι;

Α) 2 κιλά **Β)** 4 κιλά **Γ)** 6 κιλά **Δ)** 10 κιλά **Ε)** 12 κιλά

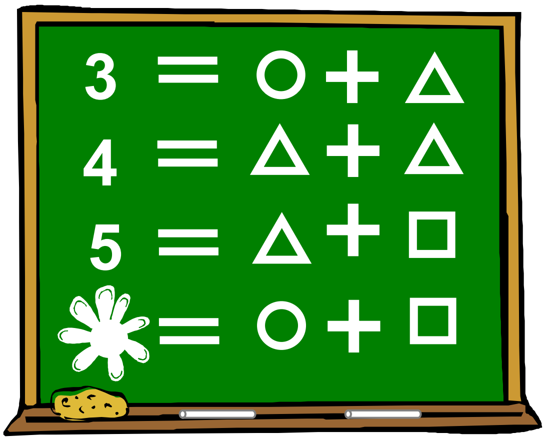
18) Ο Αντώνης, ο Βασίλης και ο Γιάννης πήραν δώρο από μία σακούλα με 10 καραμέλες. Ο καθένας έφαγε μία καραμέλα και έδωσε από μία καραμέλα στη Δασκάλα. Πόσες καραμέλες συνολικά έμειναν στο τέλος;

Α) 8 **Β)** 10 **Γ)** 24 **Δ)** 27 **Ε)** 30

19) Μέσα σε ένα κουτί βρίσκονται τρία μικρότερα. Μέσα στο κάθε μικρότερο κουτί βρίσκονται τρία ακόμα μικρότερα. Πόσα είναι όλα μαζί τα κουτιά;

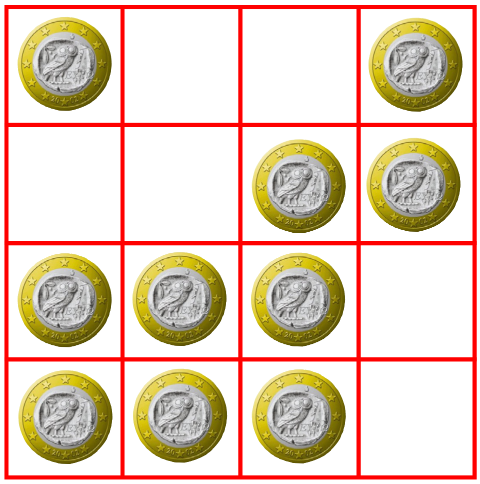
Α) 9 **Β)** 10 **Γ)** 12 **Δ)** 13 **Ε)** 15

20) Ποιος αριθμός είναι σκεπασμένος από το λουλούδι;

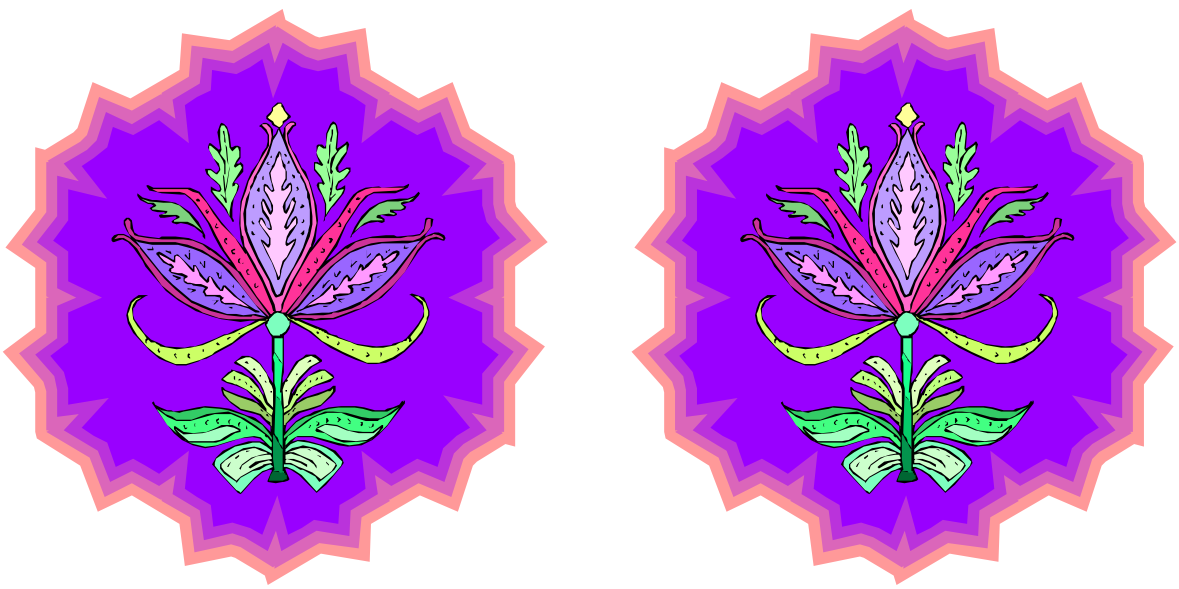


Α) 1 **Β)** 2 **Γ)** 3 **Δ)** 4 **Ε)** 5

21) Στο τετράγωνο της εικόνας βρίσκονται μερικά κέρματα. Θέλουμε να βγάλουμε κάποια από τα κέρματα για να μείνουν στο τέλος από δύο κέρματα σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη. Πόσα κέρματα πρέπει να βγάλουμε;



Α) 0 **Β)** 1 **Γ)** 2 **Δ)** 3 **Ε)** 4



Θέματα Καγκουρό 2012 Επίπεδο: 1

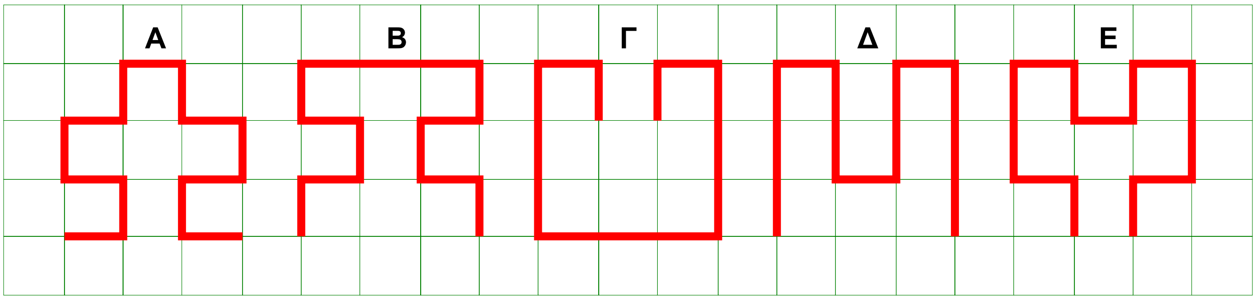
(για μαθητές της Γ' και Δ' τάξης Δημοτικού)

Ερωτήσεις 3 πόντων:

1) Ένα παιδί έγραψε με μπογιές τη λέξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. Όμοια γράμματα έχουν το ίδιο χρώμα και ανόμοια γράμματα έχουν διαφορετικό χρώμα. Πόσα χρώματα χρησιμοποίησε;

Α) 7 **Β)** 8 **Γ)** 9 **Δ)** 10 **Ε)** 13

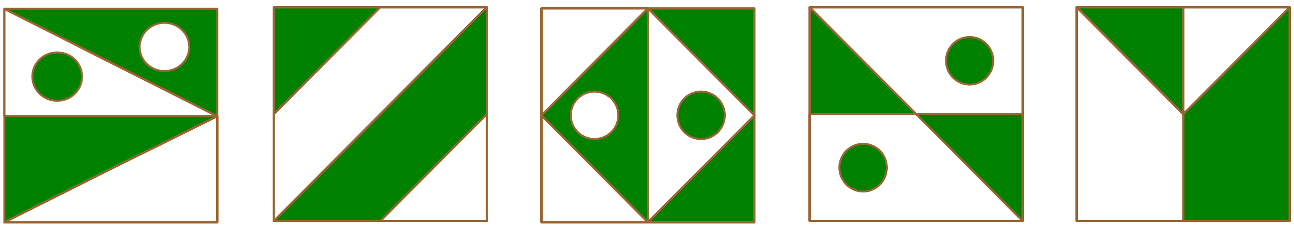
2) Ποια από τις παρακάτω κόκκινες γραμμές έχει το μεγαλύτερο μήκος;



Α) η Α **Β)** η Β **Γ)** η Γ **Δ)** η Δ **Ε)** είναι όλες ίσες

3) Σε τέσσερις από τις πέντε εικόνες η άσπρη περιοχή έχει εμβαδόν όσο η πράσινη. Σε ποια εικόνα η άσπρη περιοχή δεν είναι ίση με την πράσινη;

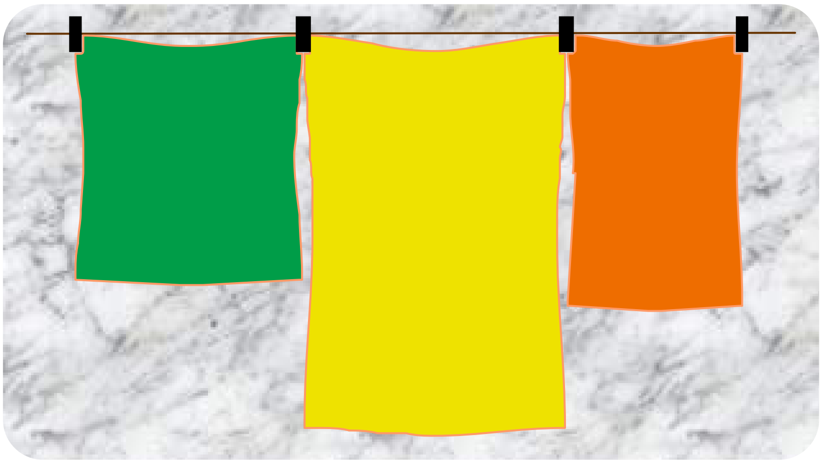
Α) **Β)** **Γ)** **Δ)** **Ε)**



4) Ένα ρολόι δείχνει 8 παρά 20. Τι ώρα θα δείχνει μετά από μισή ώρα;

Α) **Β)** **Γ)** **Δ)** **Ε)**

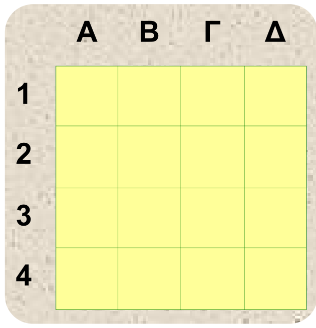
5) Ο κύριος Νοικοκύρης θέλει να κρεμάσει τις πετσέτες στην απλώστρα. Θέλει να χρησιμοποιήσει όσα λιγότερα μανταλάκια γίνεται. Για 3 πετσέτες χρειάζεται 4 μανταλάκια. Πόσα μανταλάκια θα χρειαστεί για 9 πετσέτες;

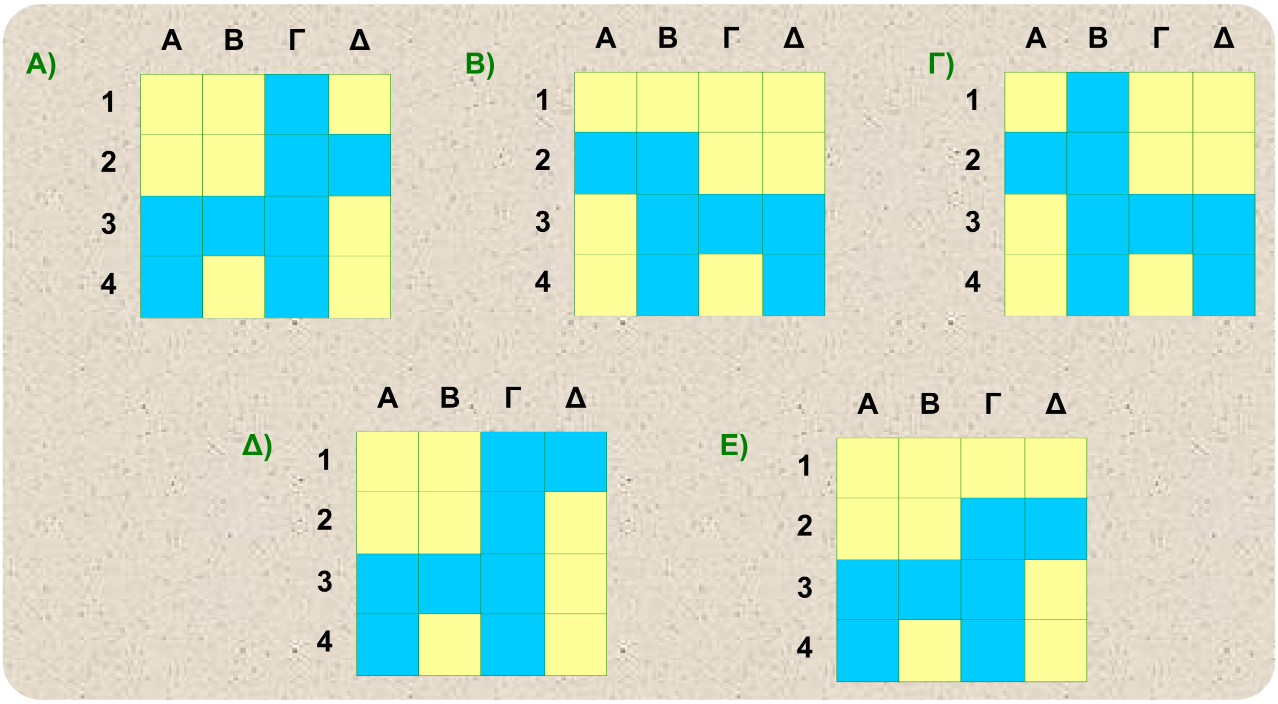


Α) 8 **Β)** 10 **Γ)** 12 **Δ)** 14 **Ε)** 16

---

6) Ο Σωκράτης χρωμάτισε τα τετραγωνάκια Α2, Β1, Β2, Β3, Β4, Γ3, Δ3 και Δ4.
Ποια θα είναι η τελική εικόνα;



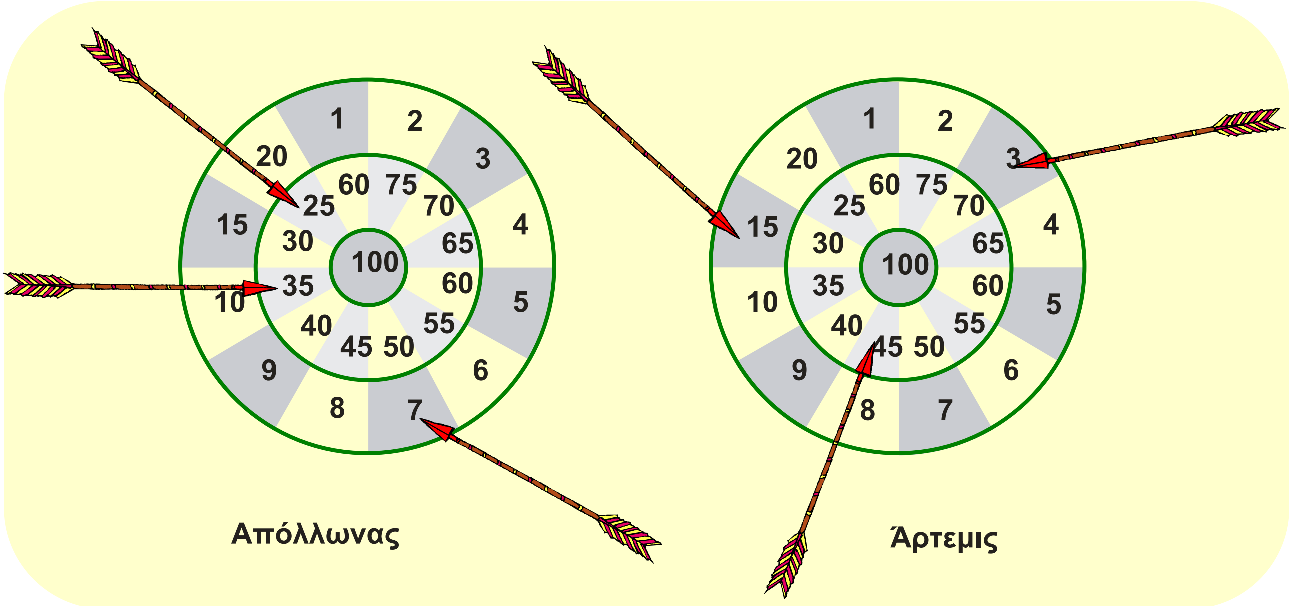


---

7) Δεκατρία παιδιά έπαιζαν κρυφτό. Ένα από τα παιδιά τα φυλούσε. Όταν έπιασε εννέα από τα παιδιά, πόσα παιδιά ήταν ακόμα κρυμμένα;

Α) 3 **Β)** 4 **Γ)** 5 **Δ)** 9 **Ε)** 22

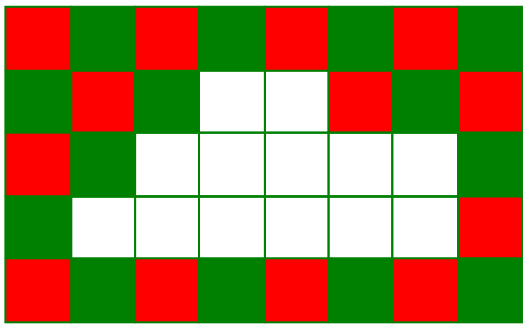
8) Ο Απόλλωνας και η Άρτεμις έριξαν από τρία βέλη στον στόχο (βλέπε την εικόνα). Ποιος κέρδισε και με πόσους πόντους;



Α) Ο Απόλλωνας, με 3 πόντους παραπάνω
Β) Η Άρτεμις, με 4 πόντους παραπάνω
Γ) Ο Απόλλωνας, με 2 πόντους παραπάνω
Δ) Η Άρτεμις, με 3 πόντους παραπάνω
Ε) Ο Απόλλωνας, με 4 πόντους παραπάνω

Ερωτήσεις 4 πόντων:

9) Ένας τοίχος ήταν φτιαγμένος με δύο ήδη από πλακάκια, α) τα κόκκινα και β) πράσινα. Τα πλακάκια σε διπλανές θέσεις έχουν διαφορετικό χρώμα. Μερικά πλακάκια έπεσαν από τον τοίχο (βλέπε σχήμα). Πόσα κόκκινα πλακάκια έπεσαν;

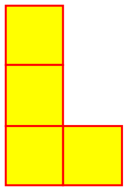


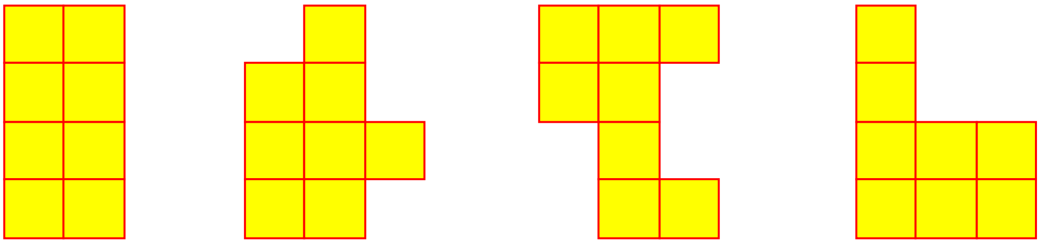
Α) 9 **Β)** 8 **Γ)** 7 **Δ)** 6 **Ε)** 5

10) Το έτος 2012 είναι δίσεκτο, που σημαίνει ότι ο Φεβρουάριος έχει 29 μέρες. Σήμερα, 17 Μαρτίου 2012, τα νέα μου γατάκια έχουν ηλικία 20 ημερών (δηλαδή 20 πλήρη εικοσιτετράωρα). Πότε γεννήθηκαν;

Α) στις 21 Φεβρουαρίου
Β) στις 23 Φεβρουαρίου
Γ) στις 25 Φεβρουαρίου
Δ) στις 26 Φεβρουαρίου
Ε) στις 28 Φεβρουαρίου

11) Ο Δαίδαλος έχει πλακάκια σχήματος L που αποτελούνται από 4 τετραγωνάκια, όπως δείχνει η εικόνα δεξιά. Πόσα από τα παρακάτω σχήματα μπορεί να κατασκευάσει χρησιμοποιώντας δύο από αυτά τα πλακάκια;





Α) κανένα **Β)** ένα **Γ)** δύο **Δ)** τρία **Ε)** όλα

---

12) Τρία ίδια λουλούδια έχουν μαζί 12 παραπάνω φύλλα από ότι ένα από αυτά τα λουλούδια. Πόσα φύλλα έχει το κάθε λουλούδι;

Α) 4 **Β)** 6 **Γ)** 8 **Δ)** 10 **Ε)** 12

---

13) Η γιαγιά έφτιαξε 20 κουλουράκια για τα εγγόνια της. Σε 15 από τα κουλουράκια έβαλε σταφίδες και σε 15 έβαλε καρύδια. Σε πόσα το λιγότερο από τα κουλουράκια έβαλε και σταφίδες και καρύδια;

Α) 4 **Β)** 5 **Γ)** 6 **Δ)** 8 **Ε)** 10

---

14) Ο Ευκλείδης πρώτα έκανε τις πράξεις που φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Μετά συμπλήρωσε τα κενά με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4. Στο τέλος έβλεπε και τους τέσσερις αυτούς αριθμούς σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του σχήματος. Ποιον αριθμό έγραψε στο πράσινο τετραγωνάκι;

1x1		**1x3**	
2x2	**6–3**		**6–5**
4–1	**1+3**	**8–7**	
9–7	**2–1**		

Α) 1 **Β)** 2 **Γ)** 3 **Δ)** 4 **Ε)** 1 ή 2

---

15) Μία τάξη έχει 15 μαθητές. Οι 6 από τους μαθητές έχουν από 5 βιβλία ο καθένας στην τσάντα του. Ο καθένας από τους υπόλοιπους έχει 3 βιβλία στην τσάντα του. Πόσα είναι όλα μαζί τα βιβλία;

Α) 45 **Β)** 50 **Γ)** 57 **Δ)** 60 **Ε)** 75

---

16) Σε έναν κήπο βρίσκονται 3 γάτες, 4 κότες, 2 πάπιες και μερικά σκυλάκια. Όλα μαζί τα ζώα έχουν 44 πόδια. Πόσα είναι τα σκυλάκια στον κήπο;

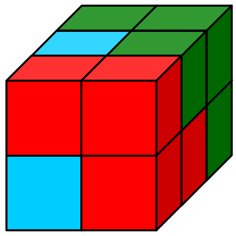
Α) 6 **Β)** 5 **Γ)** 4 **Δ)** 3 **Ε)** 2

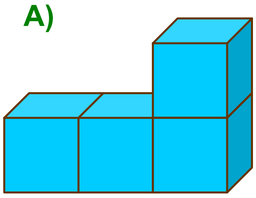
Ερωτήσεις 5 πόντων:

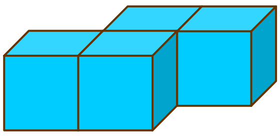
17) Στο πρώτο σχολικό λεωφορείο μπήκαν 30 μαθητές, στο δεύτερο 20, στο τρίτο 23, στο τέταρτο 25 και στο τελευταίο 29 μαθητές. Σε ένα από αυτά τα λεωφορεία τα κορίτσια ήταν διπλάσια σε αριθμό από τα αγόρια. Πόσους μαθητές είχε αυτό το λεωφορείο;

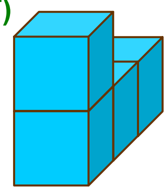
Α) 30 **Β)** 20 **Γ)** 23 **Δ)** 25 **Ε)** 29

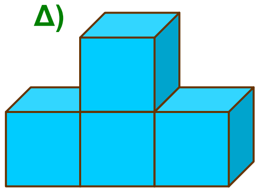
18) Το κουτί στην εικόνα είναι φτιαγμένο από τρία κομμάτια, κόκκινο, πράσινο και γαλάζιο. Το κάθε κομμάτι αποτελείται από 4 κύβους που έχουν το ίδιο χρώμα. Τι σχήμα έχει το γαλάζιο κομμάτι;

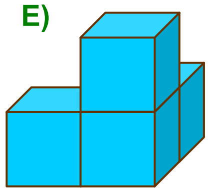


Α)


Β)


Γ)


Δ)


Ε)


19) Ο Πυθαγόρας έγραψε από έναν αριθμό στα κουτάκια που βλέπουμε στην εικόνα. Ο κάθε αριθμός που έγραψε, εκτός από τους δύο ακριανούς, είναι ίσος με έναν από τους δύο γειτονικούς του. Όλοι μαζί οι αριθμοί έχουν άθροισμα 27. Ποιον αριθμό έγραψε ο Πυθαγόρας στο κίτρινο κουτάκι;

5	3	3	2			;		1	2

Α) 2 **Β)** 3 **Γ)** 4 **Δ)** 5 **Ε)** 6

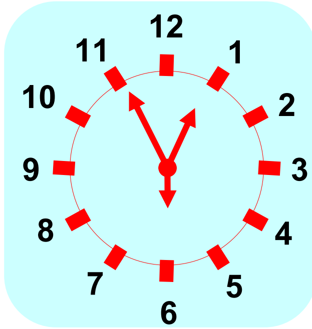
20) Ο Αρχιμήδης έγραψε δύο τριψήφιους αριθμούς χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 και 6. Χρησιμοποίησε από μία φορά το κάθε ένα από αυτά τα ψηφία. Μετά πρόσθεσε τους δύο αριθμούς που έγραψε. Ποιο είναι το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα που μπορεί να βρει;

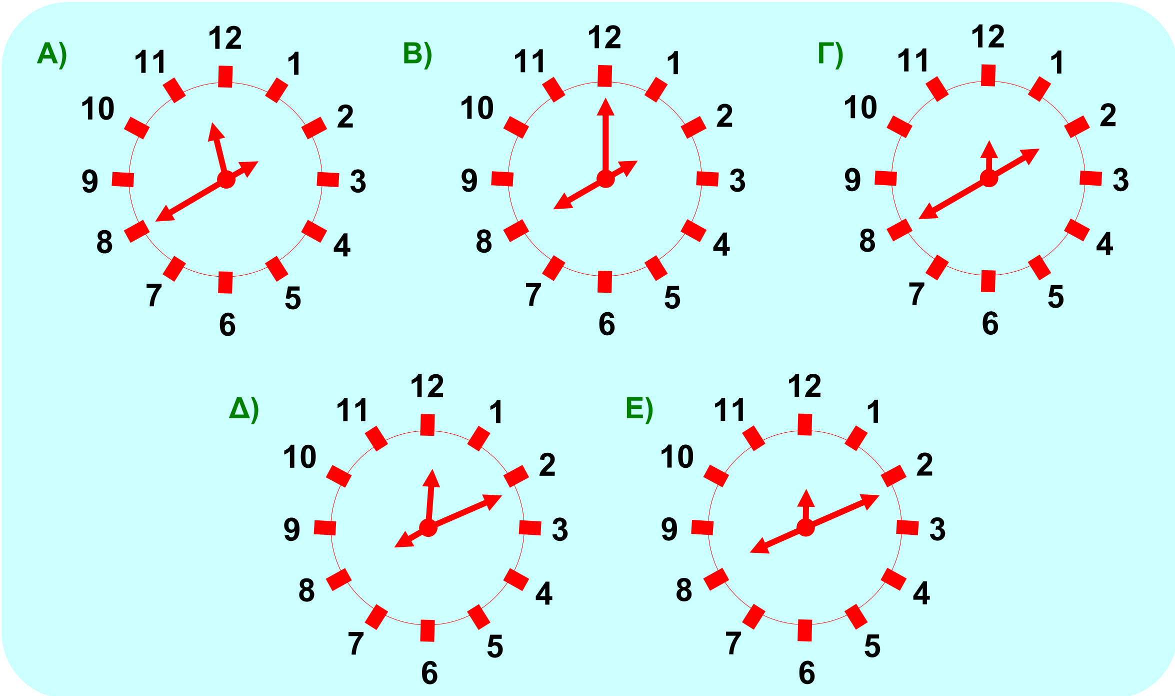
Α) 975 **Β)** 999 **Γ)** 1083 **Δ)** 1173 **Ε)** 1221

21) Ένα καγκουρό, μία καμήλα, ένα αρκουδάκι και ένας πιγκουΐνος ήθελαν να φωτογραφηθούν όλα μαζί. Το καγκουρό και το αρκουδάκι ήθελαν και τα δύο να στέκονται δίπλα στη καμήλα. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να σταθούν για την φωτογραφία;

Α) 3 **Β)** 4 **Γ)** 5 **Δ)** 6 **Ε)** 7

22) Ένα περίεργο ρολόι έχεις τρεις δείκτες διαφορετικού μήκους (για τις ώρες, τα λεπτά και τα δευτερόλεπτα). Δεν ξέρουμε τι δείχνει ο κάθε δείκτης, αλλά ξέρουμε ότι το ρολόι λειτουργεί σωστά. Στις 12 η ώρα και 55 λεπτά και 30 δευτερόλεπτα οι δείκτες ήταν όπως στην εικόνα δεξιά. Τι δείχνει το ρολόι στις 8 η ώρα και 11 λεπτά;





---

23) Ο κύριος Λογάριθμος σκέφτηκε έναν αριθμό. Μετά πολλαπλασίασε τον αριθμό με τον εαυτό του, στο αποτέλεσμα πρόσθεσε 1 και αυτό που βρήκε το διπλασίασε. Αν η τελική απάντηση που βρήκε ήταν 100, ποιος ήταν ο αριθμός που σκέφτηκε;

Α) 10 **Β)** 9 **Γ)** 8 **Δ)** 7 **Ε)** 5

---

24) Ένα καγκουρό θέλει να ανέβει μία μεγάλη σκάλα. Μπορεί να κάνει μόνο δύο ειδών πηδήματα: Είτε για να ανέβει 3 σκαλοπάτια μονομιάς ή για να κατέβει 4 μονομιάς. Ποιος είναι ο πιο μικρός αριθμός πηδημάτων που θα χρειαστεί να κάνει για να φτάσει (ακριβώς) στο 22 σκαλοπάτι;

Α) 7 **Β)** 9 **Γ)** 10 **Δ)** 12 **Ε)** 15

Θέματα Καγκουρό 2012 Επίπεδο: 2

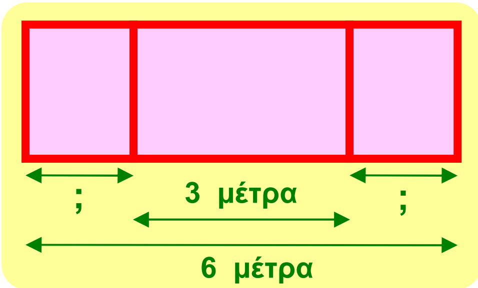
(για μαθητές της Ε' και ΣΤ' τάξης Δημοτικού)

Ερωτήσεις 3 πόντων:

1) Ένα παιδί έγραψε με μπογιές τη φράση ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ. Όμοια γράμματα έχουν το ίδιο χρώμα και ανόμοια γράμματα έχουν διαφορετικό χρώμα. Πόσα χρώματα χρησιμοποίησε;

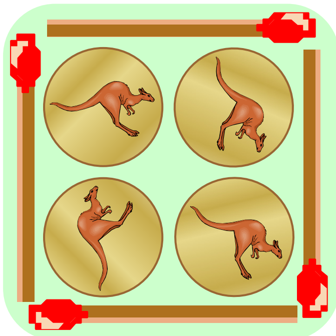
Α) 11 **Β)** 12 **Γ)** 13 **Δ)** 14 **Ε)** 15

2) Ένας πίνακας έχει μήκος 6 μέτρα. Το μεσαίο κομμάτι έχει μήκος 3 μέτρα (βλέπε την εικόνα). Τα δύο μικρότερα κομμάτια είναι ίδια μεταξύ τους. Πόσο είναι το μήκος του καθενός από τα μικρότερα κομμάτια;



Α) 1 μέτρο **Β)** 1,25 μέτρα **Γ)** 1,5 μέτρα **Δ)** 1,75 μέτρα **Ε)** 2 μέτρα

3) Η κυρία Καγκουρίδου έφτιαξε με 4 σπίρτα ένα τετράγωνο. Μέσα στο τετράγωνο έβαλε 4 κέρματα, όπως δείχνει η εικόνα. Πόσα σπίρτα θα χρειαστεί για να φτιάξει ένα τετράγωνο που θα χωρέσει 16 κέρματα σαν τα προηγούμενα; Τα κέρματα δεν πρέπει να πέφτουν το ένα πάνω στο άλλο.



Α) 8 **Β)** 10 **Γ)** 12 **Δ)** 15 **Ε)** 16

4) Σε ένα πούλμαν οι σειρές με τα καθίσματα των επιβατών είναι η μια πίσω από την άλλη και είναι αριθμημένες από το 1 έως το 15, αλλά δεν υπάρχει σειρά με νούμερο 13. Η σειρά νούμερο 6 έχει 2 καθίσματα ενώ οι υπόλοιπες έχουν από 4. Πόσα καθίσματα επιβατών έχει το πούλμαν;

Α) 50 **Β)** 52 **Γ)** 54 **Δ)** 56 **Ε)** 60

5) Όταν είναι 3 η ώρα το μεσημέρι στην Αθήνα τότε στη Νέα Υόρκη είναι 8 το πρωί της ίδιας μέρας. Όταν είναι 11 η ώρα το βράδυ στην Νέα Υόρκη, τι ώρα δείχνουν εκείνη τη στιγμή τα ρολόγια στην Αθήνα;

Α) 6 η ώρα το πρωί **Β)** 6 η ώρα το απόγευμα **Γ)** 4 η ώρα το πρωί **Δ)** 4 η ώρα το απόγευμα **Ε)** κανένα από τα προηγούμενα

6) Πόσο θα βρούμε αν προσθέσουμε όλα μαζί τα κλάσματα

$$\frac{1+3}{2},\ \frac{2+4}{3},\ \frac{3+5}{4},\ \frac{4+6}{5},\ \frac{5+7}{6}\ \text{και}\ \frac{6+8}{7};$$

Α) $\frac{54}{27}$ **Β)** $\frac{54}{7}$ **Γ)** 2 **Δ)** 12 **Ε)** κανένα από τα προηγούμενα

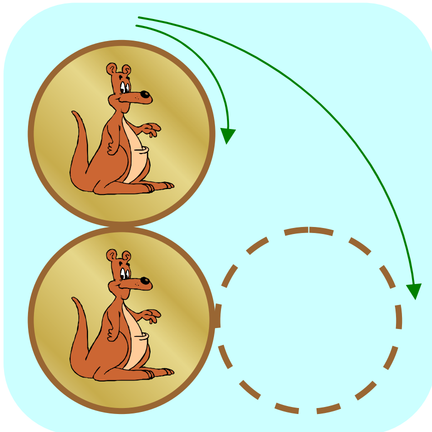
---

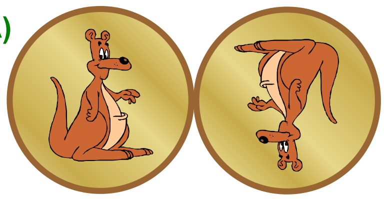
7) Ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου $81 \times 82 \times 83 \times 84 \times 85$ μετά τις πράξεις;

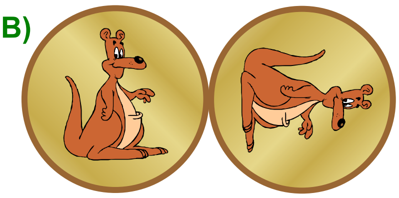
Α) 0 **Β)** 2 **Γ)** 4 **Δ)** 6 **Ε)** 8

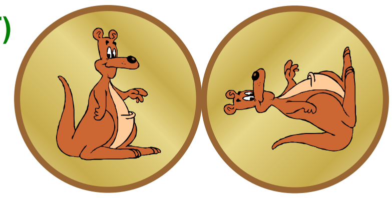
---

8) Το πάνω κέρμα γυρνάει χωρίς να γλιστράει γύρω από το κέρμα που είναι από κάτω του. Σταματάμε όταν φτάσουμε στο σημείο που δείχνει το μεγάλο βέλος στην εικόνα. Ποιο από τα παρακάτω είναι το τελικό αποτέλεσμα;



Α) 

Β) 

Γ) 

Δ) 

Ε) άλλη απάντηση

---

9) Η σάλτσα της κυρίας Μαγείρισσας αποτελείται από 2 κουταλιές νερό, 3 κουταλιές ξύδι και 6 κουταλιές λάδι. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό για την σάλτσα;

Α) Περιέχει περισσότερο ξύδι από λάδι

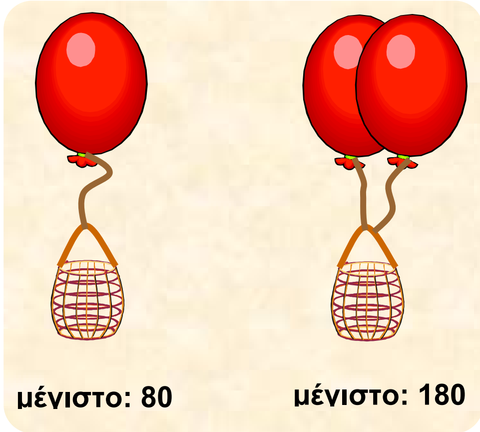
Β) Το λάδι είναι περισσότερο από το ξύδι και το νερό μαζί

Γ) Το ξύδι είναι περισσότερο από το λάδι και το νερό μαζί

Δ) Το νερό είναι περισσότερο από το ξύδι και το λάδι μαζί

Ε) Το ξύδι είναι λιγότερο από το νερό

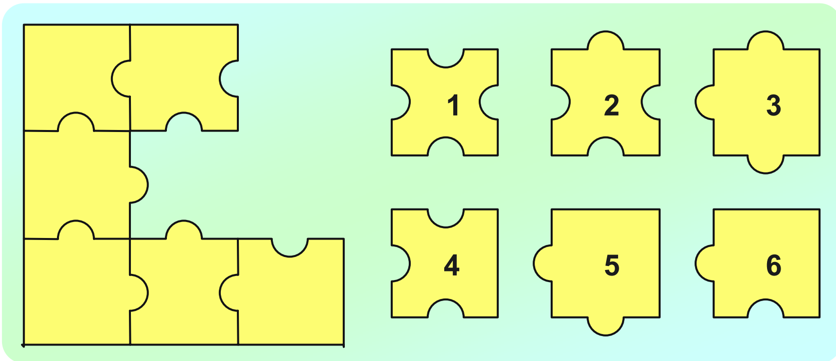
10) Ένα μπαλόνι μπορεί να σηκώσει ένα βαρύ καλάθι που περιέχει βάρος μέχρι 80 κιλά. Δύο ίδια μπαλόνια σηκώνουν το καλάθι αν περιέχει βάρος μέχρι 180 κιλά. Πόσο ζυγίζει το καλάθι;



Α) 10 κιλά **Β)** 20 κιλά **Γ)** 30 κιλά **Δ)** 40 κιλά **Ε)** 50 κιλά

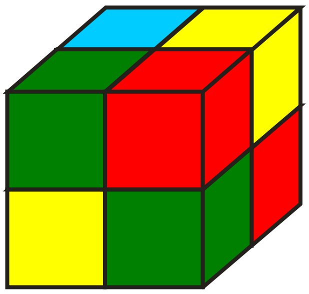
Ερωτήσεις 4 πόντων:

11) Με ποια τρία από τα αριθμημένα κομμάτια μπορούμε να συμπληρώσουμε το σχήμα αριστερά ώστε να γίνει τετράγωνο;



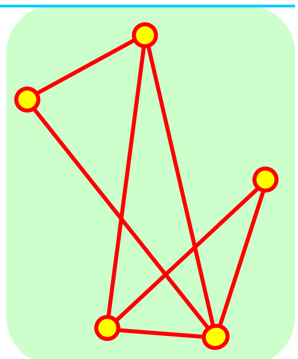
Α) μπορούμε με τα 1, 3, 4 **Β)** μπορούμε με τα 1, 3, 6 **Γ)** μπορούμε με τα 2, 3, 5 **Δ)** μπορούμε με τα 2, 3, 6 **Ε)** μπορούμε με τα 2, 5, 6

12) Η Λίνα έχει 8 μονόχρωμους κύβους (κόκκινους, πράσινους, κίτρινους, μπλε). Με τους κύβους έφτιαξε έναν μεγαλύτερο, όπως δείχνει η εικόνα. Σε αυτόν, οποιεσδήποτε δύο πλευρές των μικρών κύβων που ακουμπάνε μεταξύ τους έχουν διαφορετικό χρώμα. Τι χρώμα έχει ο κύβος που δε φαίνεται;



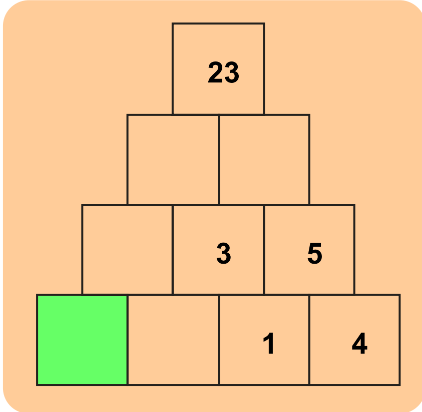
Α) κίτρινο **Β)** πράσινο **Γ)** μπλε **Δ)** κόκκινο **Ε)** δεν μπορούμε να ξέρουμε

13) Στη Χώρα των Θαυμάτων υπάρχουν 5 πόλεις. Κάθε δύο πόλεις συνδέονται με έναν δρόμο, που είναι ορατός ή αόρατος. Στον χάρτη φαίνονται μόνο οι 7 από τους δρόμους. Η Αλίκη έχει μαγικά γυαλιά με τα οποία βλέπει και τους αόρατους δρόμους. Πόσους αόρατους δρόμους βλέπει η Αλίκη με τα μαγικά της γυαλιά;



Α) 9 **Β)** 8 **Γ)** 7 **Δ)** 3 **Ε)** 2

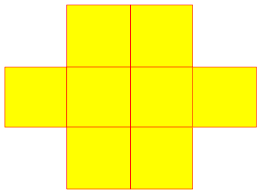
14) Βάζουμε από έναν αριθμό στα τετραγωνάκια της εικόνας. Θέλουμε κάθε αριθμός να είναι ίσος με το άθροισμα των δύο αριθμών στα τετραγωνάκια αμέσως από κάτω του. Ποιος αριθμός πρέπει να μπει στο πράσινο τετραγωνάκι;



Α) 2 **Β)** 6 **Γ)** 7 **Δ)** 10
Ε) κανένα από τα προηγούμενα

---

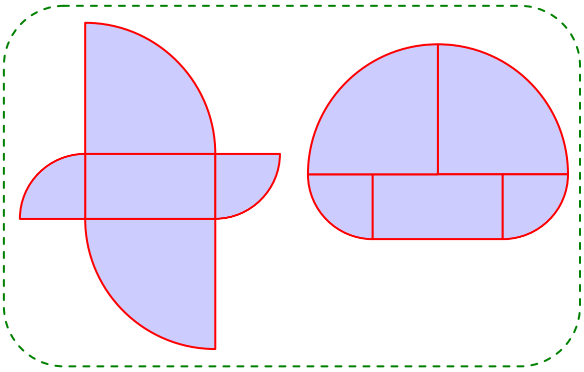
15) Ένας κήπος αποτελείται από 8 ίδια τετράγωνα, όπως στο σχήμα. Η περίμετρος του κήπου είναι 42 μέτρα. Πόσο είναι το εμβαδόν του;



Α) 8 τ.μ. **Β)** 9 τ.μ. **Γ)** 24 τ.μ. **Δ)** 72 τ.μ. **Ε)** 128 τ.μ.

---

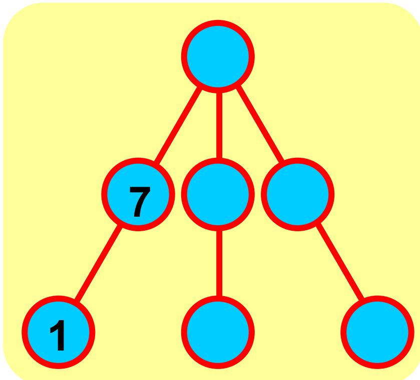
16) Τα δύο σχήματα της εικόνας αποτελούνται από τα ίδια 5 κομμάτια. Το ένα κομμάτι είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων 5×10 (σε μέτρα) και καθένα από τα άλλα κομμάτια είναι το ένα τέταρτο κύκλου. Πόσο πιο μεγάλη είναι η περίμετρος του ενός σχήματος από το άλλο;



Α) 2,5 μέτρα **Β)** 5 μέτρα **Γ)** 10 μέτρα
Δ) 20 μέτρα **Ε)** 30 μέτρα

---

17) Κάποιος έβαλε τους αριθμούς 2, 3, 4, 5 και 6 στους πέντε κενούς κύκλους, από έναν σε κάθε κύκλο. Το άθροισμα των αριθμών σε κάθε σημειωμένη γραμμή τριών κύκλων είναι το ίδιο. Ποιον αριθμό έβαλε στην κορυφή του σχήματος;



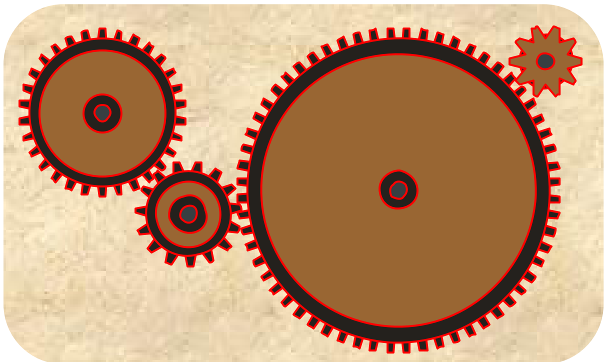
Α) τον 2 **Β)** τον 3 **Γ)** τον 4
Δ) τον 5 **Ε)** τον 6

---

18) Ρίχνουμε μία μπάλα από την οροφή ενός σπιτιού που είναι σε ύψος 18 μέτρων. Κάθε φορά που η μπάλα χτυπάει το έδαφος, σηκώνεται σε ύψος ίσο με τα $\frac{2}{3}$ του μέγιστου ύψους που βρέθηκε την προηγούμενη φορά. Πόσες φορές η μπάλα θα ανέβει σε ύψος μεγαλύτερο από 6 μέτρα;

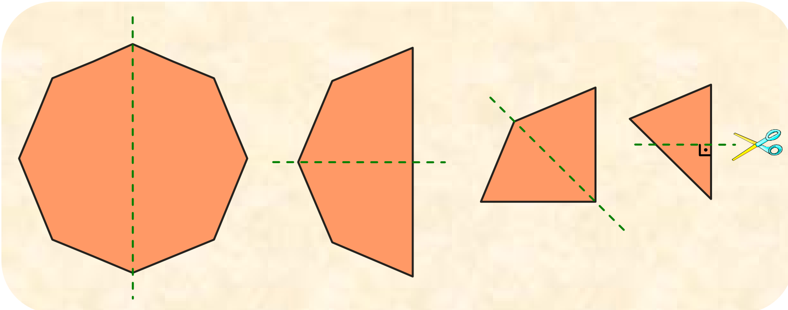
Α) καμία **Β)** 1 **Γ)** 2 **Δ)** 3 **Ε)** 4

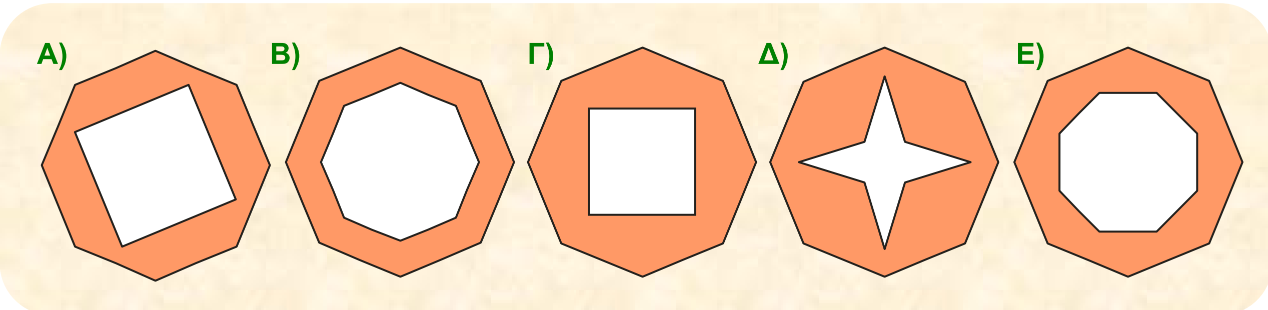
19) Έχουμε 4 γρανάζια το ένα δίπλα στο άλλο. Το πρώτο έχει 30 δοντάκια, το δεύτερο 15, το τρίτο 60 και το τελευταίο 10. Πόσες φορές θα γυρίσει το τελευταίο γρανάζι αν το πρώτο κάνει έναν γύρο;



Α) 3 **Β)** 4 **Γ)** 6 **Δ)** 8 **Ε)** 9

20) Διπλώνουμε τρεις φορές στη μέση ένα κανονικό οκτάγωνο μέχρι να γίνει τρίγωνο. Μετά κόβουμε με το ψαλίδι μία γωνία του τριγώνου, όπως στο σχήμα. Αν ξεδιπλώσουμε το χαρτί, τι σχήμα θα προκύψει;





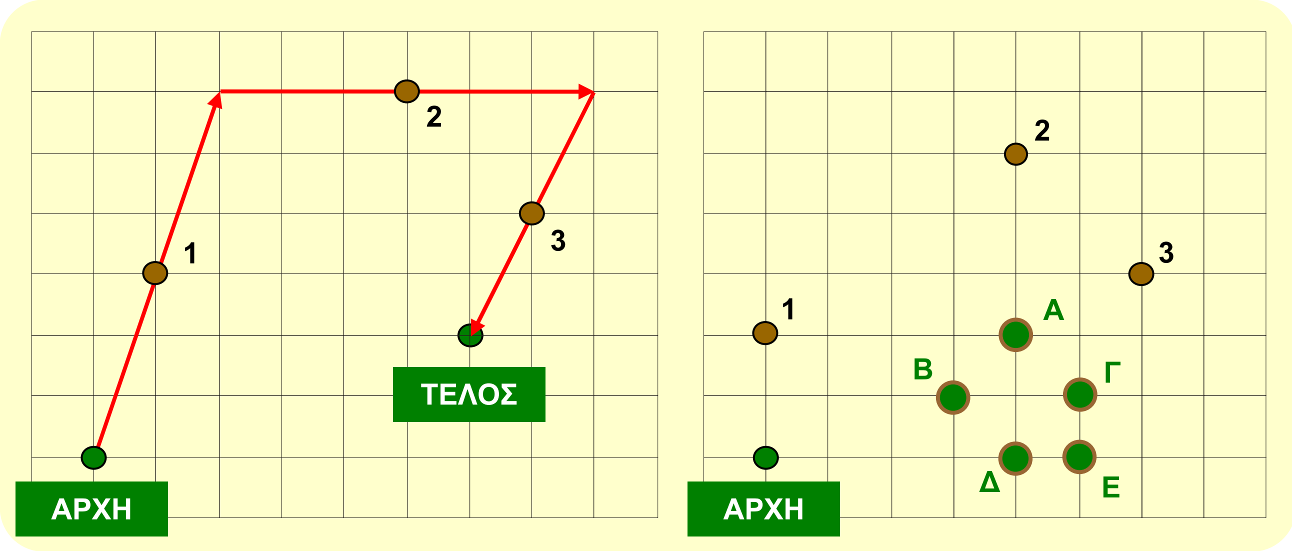
Ερωτήσεις 5 πόντων:

21) Ένα καλάθι περιείχε μήλα και πορτοκάλια. Στην αρχή όλα μαζί τα φρούτα ήσαν 25. Η Θάλεια έφαγε 1 μήλο και 3 πορτοκάλια και ο Ερμής έφαγε 3 μήλα και 2 πορτοκάλια. Τώρα το καλάθι περιέχει ίσο πλήθος από μήλα και από πορτοκάλια. Πόσα ήσαν τα πορτοκάλια στην αρχή;

Α) 12 **Β)** 13 **Γ)** 16 **Δ)** 20 **Ε)** 21

22) (Βλέπε σχήμα στην επόμενη σελίδα). Δύο καγκουρό πήδηξαν πάνω από τις πέτρες που είναι σημειωμένες ως 1, 2, και 3 στην εικόνα. Σε κάθε πήδημα η πέτρα είναι στη μέση της γραμμής που ενώνει την αρχή με το τέλος του πηδήματος. Τα άλματα του πρώτου καγκουρό φαίνονται στην εικόνα αριστερά. Στην εικόνα δεξιά βλέπουμε την αρχή της διαδρομής του δεύτερου καγκουρό, που πήδηξε πάνω από τις πέτρες 1, 2 και 3 (με αυτή τη σειρά). Ποιο από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ ή Ε είναι το τέλος της διαδρομής του;

Α) Α **Β)** Β **Γ)** Γ **Δ)** Δ **Ε)** Ε



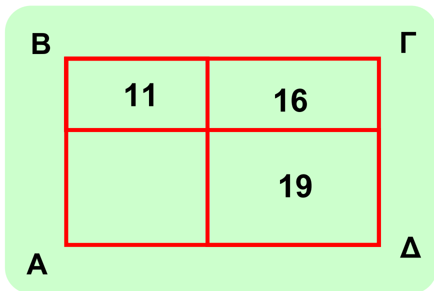
---

23) Σε ένα πάρτι βρέθηκαν 9 παιδιά. Οι ηλικίες τους ήταν 2, 3, 4 και 5 χρόνια. Τρία παιδιά ήταν 2 χρονών. Τα πιο πολλά παιδιά ήταν 4 χρονών. Πόσο είναι το άθροισμα των ηλικιών των παιδιών;

Α) 18 **Β)** 22 **Γ)** 26 **Δ)** 30 **Ε)** 34

---

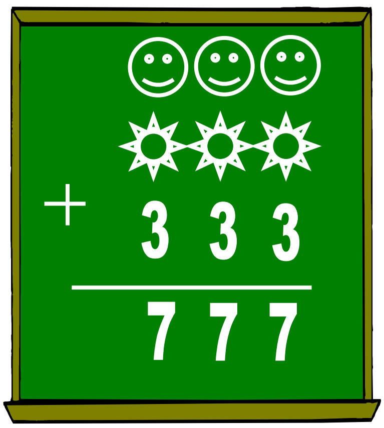
24) Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ κόπηκε σε 4 μικρότερα. Οι περίμετροι των τριών από αυτά είναι 11, 16 και 19 μέτρα, όπως δείχνει η εικόνα. Πόση είναι η περίμετρος του ΑΒΓΔ;



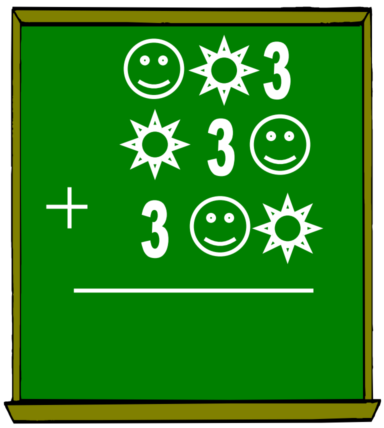
Α) 28 **Β)** 30 **Γ)** 32
Δ) 38 **Ε)** 40

---

25) Στον πίνακα 1 είναι γραμμένη μια πρόσθεση. Όλα τα  είναι το ίδιο ψηφίο, και όλα τα  είναι επίσης κάποιο ίδιο ψηφίο. Πόσο θα βρούμε στην πρόσθεση του πίνακα 2;



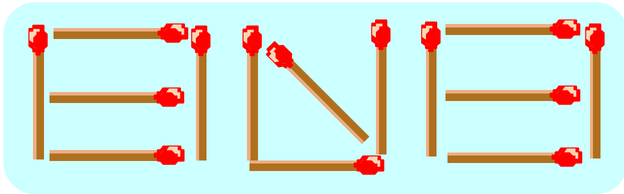
πίνακας 1

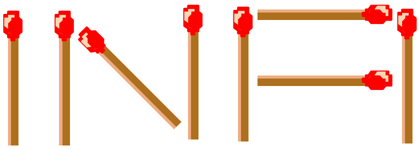


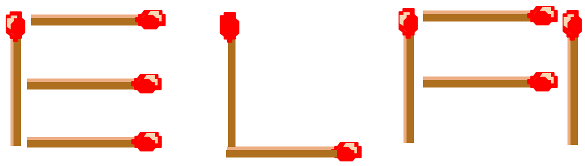
πίνακας 2

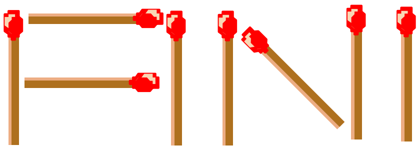
Α) 777 **Β)** 888
Γ) 999 **Δ)** έναν αριθμό μικρότερο από 777
Ε) κανένα από τα προηγούμενα

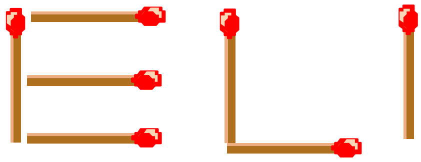
26) Ο Λεονάρδος έφτιαξε με σπίρτα το διπλανό σχήμα. Μετά έβγαλε 4 από τα σπίρτα, χωρίς να πειράξει τα υπόλοιπα, και έφτιαξε ένα από τα παρακάτω σχήματα. Ποιο από το παρακάτω είναι το σχήμα που έφτιαξε;

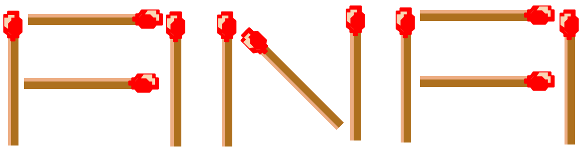


Α) 

Β) 

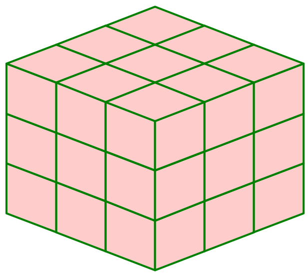
Γ) 

Δ) 

Ε) 

---

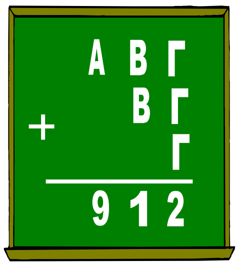
27) Ο Δαίδαλος χρησιμοποίησε $1\times1\times1$ κύβους για να φτιάξει έναν $3\times3\times3$ κύβο, όπως στην εικόνα. Έβαλε μία σταγόνα κόλλα ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο έδρες των μικρών κύβων που ακουμπούσαν η μία στην άλλη. Πόσες σταγόνες κόλλας χρειάστηκε;



Α) 27 **Β)** 48 **Γ)** 54 **Δ)** 64 **Ε)** 108

---

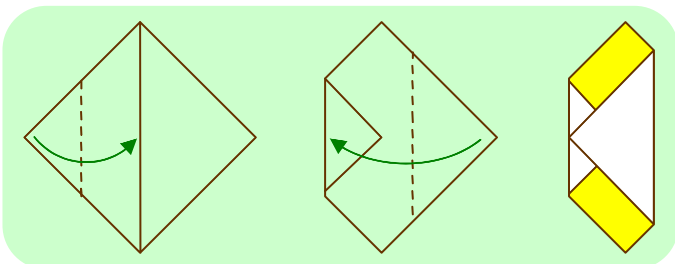
28) Στον πίνακα ήταν γραμμένη μία πρόσθεση τριών αριθμών, όπως δείχνει η εικόνα. Ίδια γράμματα δηλώνουν το ίδιο ψηφίο. Πόσος είναι ο Β αν ξέρουμε ότι δεν είναι 0;



Α) 3 **Β)** 4 **Γ)** 5 **Δ)** 6 **Ε)** 7

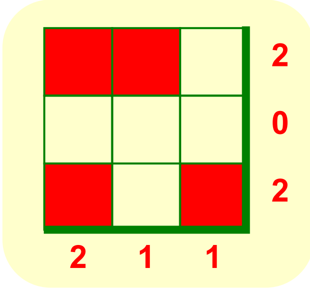
---

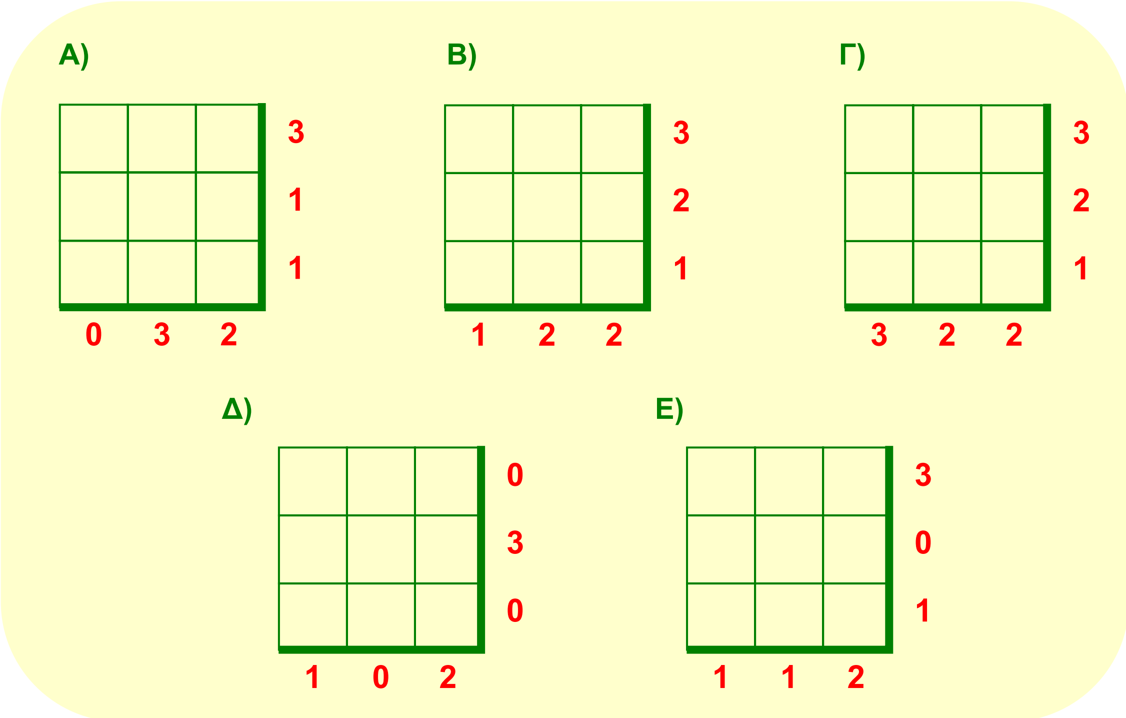
29) Ένα τετράγωνο φύλλο χαρτιού έχει πλευρά 4 μέτρων. Το διπλώνουμε δύο φορές, όπως δείχνει η εικόνα. Πόσο είναι το εμβαδόν καθενός από τα δύο κίτρινα ορθογώνια παραλληλόγραμμα;



Α) 0,5 τ.μ. **Β)** 1 τ.μ. **Γ)** 1,5 τ.μ. **Δ)** 2 τ.μ. **Ε)** 2,5 τ.μ.

30) Μερικά τετραγωνάκια ενός 3×3 πίνακα βάφονται κόκκινα. Μετά γράφουμε στο περιθώριο του πίνακα το πλήθος των κόκκινων τετραγώνων στην αντίστοιχη γραμμή ή στήλη. (Ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται δεξιά). Ένας καλλιτέχνης έκανε τη δική του ζωγραφιά (διαφορετική από το παράδειγμα) και μετά έσβησε τα κόκκινα τετραγωνάκια. Το αποτέλεσμα ήταν ένα από τα παρακάτω σχήματα. Ποιο από τα παρακάτω είναι το μόνο που θα μπορούσε να είναι το αποτέλεσμα της ζωγραφιάς του;



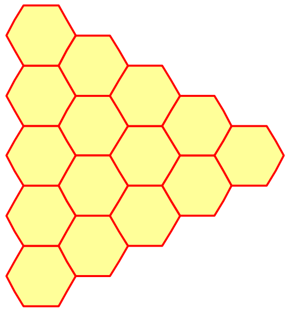


Θέματα Καγκουρό 2012 Επίπεδο: 3

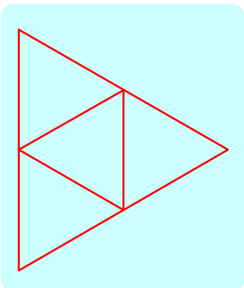
(για μαθητές της Α' και Β τάξης Γυμνασίου)

Ερωτήσεις 3 πόντων:

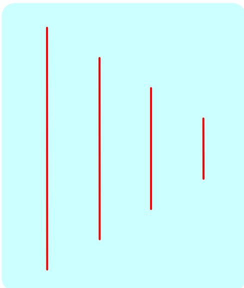
1) Με βάση την εικόνα δεξιά ζωγραφίζουμε μία καινούργια ενώνοντας τα κέντρα συμμετρίας οποιωνδήποτε δύο *γειτονικών* εξαγώνων. Τι σχήμα θα προκύψει;



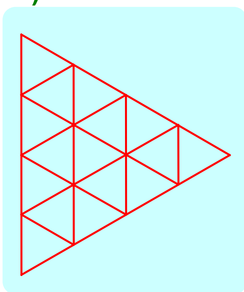
Α)



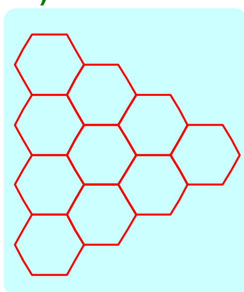
Β)



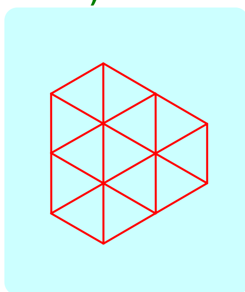
Γ)



Δ)



Ε)



2) Τέσσερα ίδια κουτιά με σοκολατάκια έχουν 48 περισσότερα σοκολατάκια από ότι ένα από αυτά τα κουτιά. Πόσα σοκολατάκια έχει το κάθε κουτί;

Α) 12 **Β)** 16 **Γ)** 24 **Δ)** 44 **Ε)** κανένα από τα προηγούμενα

3) Ποιο είναι το αποτέλεσμα της αφαίρεσης $11{,}11 - 1{,}111$;

Α) 9,009 **Β)** 9,0909 **Γ)** 9,99 **Δ)** 9,999 **Ε)** 10

4) Ένα ρολόι τοποθετείται οριζόντια στο τραπέζι, με το καντράν προς τα πάνω. Εκείνη τη στιγμή ο λεπτοδείκτης δείχνει προς τα βορειοανατολικά. Σε πόσα λεπτά της ώρας ο λεπτοδείκτης θα δείξει βορειοδυτικά για πρώτη φορά;

Α) σε 45 λεπτά **Β)** σε 40 λεπτά **Γ)** σε 30 λεπτά **Δ)** σε 20 λεπτά **Ε)** σε 15 λεπτά

5) Πόσο είναι το άθροισμα των ψηφίων του $10^5 - 2012$ όταν γραφεί απλοποιημένος στο δεκαδικό σύστημα γραφής;

Α) 11 **Β)** 32 **Γ)** 40 **Δ)** 41 **Ε)** 42

6) Μία Λερναία Ύδρα έχει 5 κεφάλια. Αν της κόψουν ένα κεφάλι, τότε φυτρώνουν 5 καινούργια. Ο Ηρακλής της έκοψε συνολικά 6 κεφάλια. Πόσα κεφάλια είχε στο τέλος η Λερναία Ύδρα;

Α) 25 **Β)** 28 **Γ)** 29 **Δ)** 30 **Ε)** 35

---

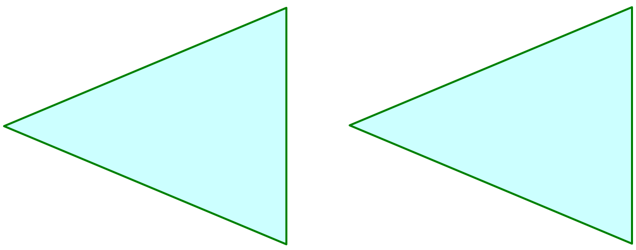
7) Ο Ευκλείδης αντικατέστησε όλα τα οκτάρια στις παρακάτω παραστάσεις με επτάρια. Σε ποια από τις περιπτώσεις θα βρει το ίδιο τελικό αποτέλεσμα είτε κάνει τις σημειωμένες πράξεις με οκτάρια είτε με επτάρια;

Α) $\frac{8+8}{8}+8$ **Β)** $\frac{8\times(8+8)}{8}$ **Γ)** $8+8-8+8$

Δ) $(8+8-8)\times 8$ **Ε)** $\frac{8+8-8}{8}$

---

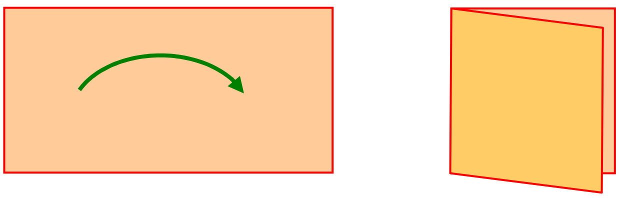
8) Η εικόνα δείχνει δύο τρίγωνα. Ο Πυθαγόρας θέλει να ζωγραφίσει μία ευθεία που περνάει από μία κορυφή του αριστερού τριγώνου και από μία κορυφή του δεξιού. Επίσης θέλει η ευθεία που θα ζωγραφίσει να μην κόβει κανένα από τα τρίγωνα. Πόσες τέτοιες ευθείες μπορεί να ζωγραφίσει;

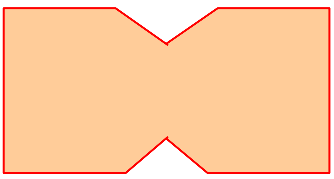
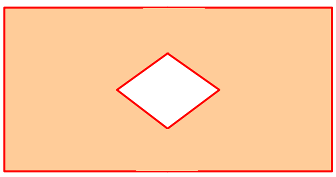
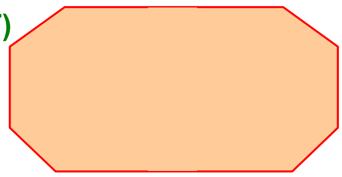


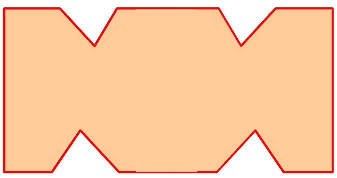
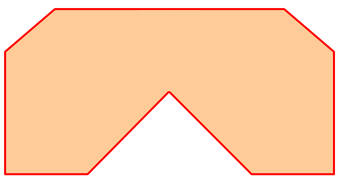
Α) 1 **Β)** 2 **Γ)** 3 **Δ)** 4 **Ε)** περισσότερες από 4

---

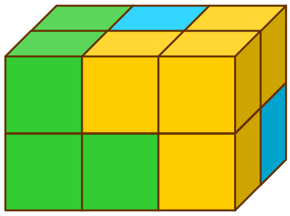
9) Ο Φειδίας δίπλωσε ένα κομμάτι χαρτί, όπως δείχνει η εικόνα. Μετά έκανε δύο ίσιες ψαλιδιές. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα *δεν μπορεί* να είναι το αποτέλεσμα που θα πάρει;



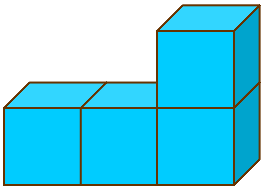
Α)  **Β)**  **Γ)** 

Δ)  **Ε)** 

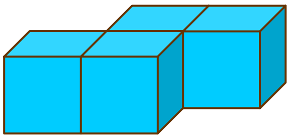
10) Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο της εικόνας είναι κατασκευασμένο από τρία κομμάτια. Κάθε κομμάτι αποτελείται από 4 ίδιους κύβους και είναι μονόχρωμο (πράσινο, κίτρινο ή γαλάζιο αντίστοιχα). Τι σχήμα έχει το γαλάζιο κομμάτι;



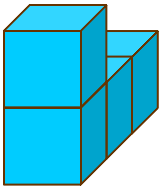
Α)



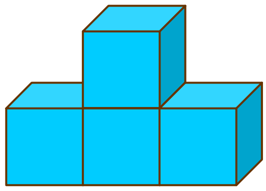
Β)



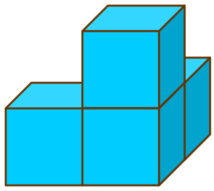
Γ)



Δ)

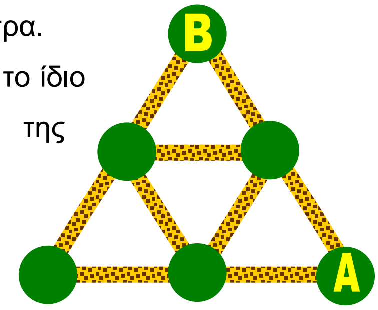


Ε)



Ερωτήσεις 4 πόντων:

11) Κάθε ένα από τα 9 μονοπάτια στο πάρκο της εικόνας είναι 100 μέτρα. Ο Οδυσσέας θέλει να πάει από το σημείο Α στο Β χωρίς να διασχίσει το ίδιο μονοπάτι περισσότερες από μία φορές. Πόσο είναι το μήκος της μεγαλύτερης δυνατής διαδρομής που μπορεί να κάνει;

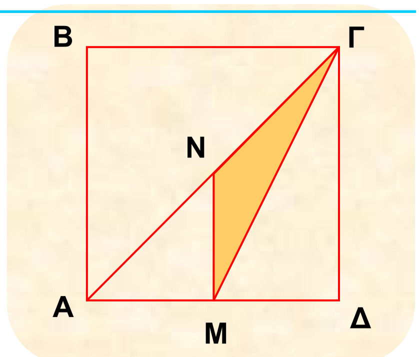


Α) 900 μέτρα **Β)** 800 μέτρα **Γ)** 700 μέτρα
Δ) 600 μέτρα **Ε)** 400 μέτρα

12) Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου φυσικού αριθμού μικρότερου από 37, είναι 11. Πόσο είναι το γινόμενό τους;

Α) 27 **Β)** 24 **Γ)** 21 **Δ)** 18 **Ε)** κανένα από τα προηγούμενα

13) Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά με μήκος 4 μέτρα. Το Μ είναι το μέσον του ΑΔ και το Ν είναι το μέσο του ΑΓ. Πόσο είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΓΜΝ;

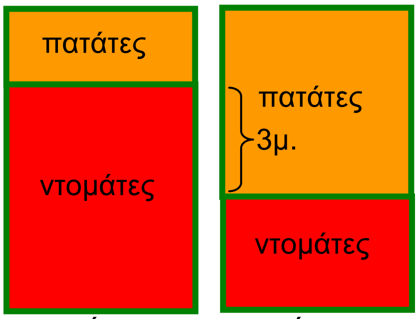


Α) 1 τ.μ **Β)** 1,5 τ.μ **Γ)** 2 τ.μ
Δ) 2,5 τ.μ **Ε)** κανένα από τα προηγούμενα

14) Ένας ζωγράφος έβαψε κάθε αριθμό με κόκκινο ή με μπλε ή με πράσινο χρώμα, με αυτή τη σειρά. Έτσι το 1 ήταν κόκκινο, το 2 μπλε, το 3 πράσινο, το 4 κόκκινο, το 5 μπλε και λοιπά, με το ίδιο μοτίβο πάντα. Αν προσθέσουμε έναν κόκκινο και έναν μπλε αριθμό, τι χρώμα θα έχει το άθροισμά τους;

Α) δεν μπορούμε να ξέρουμε **Β)** μπλε ή κόκκινο **Γ)** οπωσδήποτε πράσινο
Δ) οπωσδήποτε κόκκινο **Ε)** οπωσδήποτε μπλε

15) Ο κύριος Κηπουρός καλλιεργεί πατάτες και ντομάτες στον κήπο του. Φέτος άλλαξε το μέρος του κήπου όπου είχε πατάτες και από ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το έκανε τετράγωνο μεγαλώνοντας την μία πλευρά κατά 3 μέτρα. Το αποτέλεσμα ήταν να μικρύνει κατά 15 τ.μ. το μέρος του κήπου με τις ντομάτες. Πόσο ήταν πέρσι το εμβαδόν του μέρους του κήπου με τις πατάτες;



πέρσι φέτος

Α) 5 τ.μ. **Β)** 9 τ.μ. **Γ)** 10 τ.μ. **Δ)** 15 τ.μ. **Ε)** 18 τ.μ.

---

16) Ο Διόφαντος θέλει να βάλει από έναν αριθμό στα τρία άδεια κουτάκια του διπλανού σχήματος. Θέλει το άθροισμα των τριών πρώτων αριθμών του σχήματος να είναι 10, το άθροισμα των τριών μεσαίων να είναι 20 και το άθροισμα των τριών τελευταίων να είναι 30. Ποιον αριθμό πρέπει να βάλει στο μεσαίο κουτάκι;

1				**13**

Α) 5 **Β)** 6 **Γ)** 7 **Δ)** 8 **Ε)** 10

---

17) Η σάλτσα της κυρίας Μαγείρισσας αποτελείται από λάδι, ξύδι και νερό. Το λάδι είναι διπλάσιο από το ξύδι και τριπλάσιο από το νερό. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό για την σάλτσα;

Α) Περιέχει περισσότερο ξύδι από λάδι

Β) Το λάδι είναι περισσότερο από το ξύδι και το νερό μαζί

Γ) Το ξύδι είναι περισσότερο από το λάδι και το νερό μαζί

Δ) Το νερό είναι περισσότερο από το ξύδι και το λάδι μαζί

Ε) Το ξύδι είναι λιγότερο από το νερό

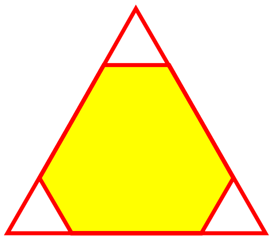
---

18) Ένα καγκουρό κρατάει 5 οδοντογλυφίδες. διαφορετικού μήκους. Η κάθε οδοντογλυφίδα έχει μήκος 2 cm περισσότερο από την αμέσως πιο μικρή της. Οι δύο πιο μικρές οδοντογλυφίδες έχουν μαζί μήκος όσο η πιο μεγάλη. Τι μήκος έχουν συνολικά όλες μαζί οι οδοντογλυφίδες;

Α) 6 cm **Β)** 14 cm **Γ)** 22 cm **Δ)** 44 cm **Ε)** 50 cm

---

19) Κόβουμε με το ψαλίδι τρία ίδια ισόπλευρα τρίγωνα από τις γωνίες ενός μεγάλου ισόπλευρου τριγώνου που έχει πλευρά μήκους 6 μέτρων. Τα τρία μικρά τρίγωνα μαζί έχουν συνολική περίμετρο όσο το κίτρινο εξάγωνο που σχηματίστηκε. Πόσο είναι το μήκος κάθε πλευράς ενός από τα μικρά τρίγωνα;



Α) 1 μέτρο **Β)** 1,2 μέτρα **Γ)** 1,25 μέτρα **Δ)** 1,5 μέτρα **Ε)** 2 μέτρα

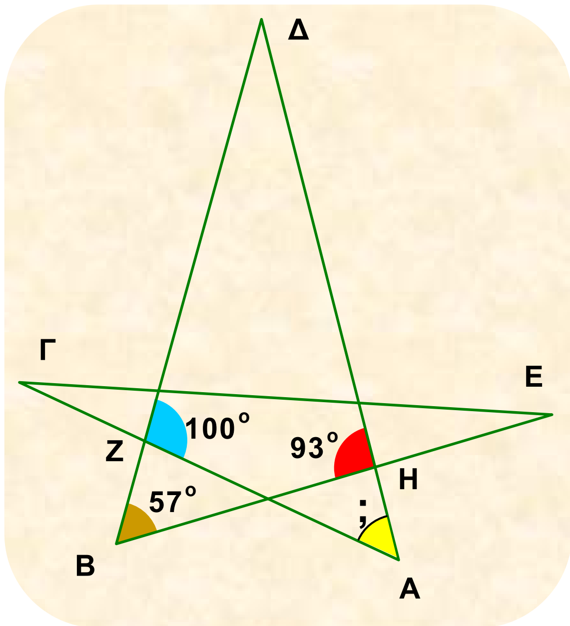
20) Η Αίθρα έχει ένα ψαλίδι και πέντε γράμματα από χαρτόνι, όπως στην εικόνα. Κόβει το κάθε γράμμα με *μία* ψαλιδιά (κατά μήκος ευθείας γραμμής) με τρόπο ώστε να το κόψει σε όσο γίνεται περισσότερα κομμάτια. Ποιο γράμμα θα της δώσει τα περισσότερα κομμάτια;

Α) **Β)** **Γ)** **Δ)** **Ε)**

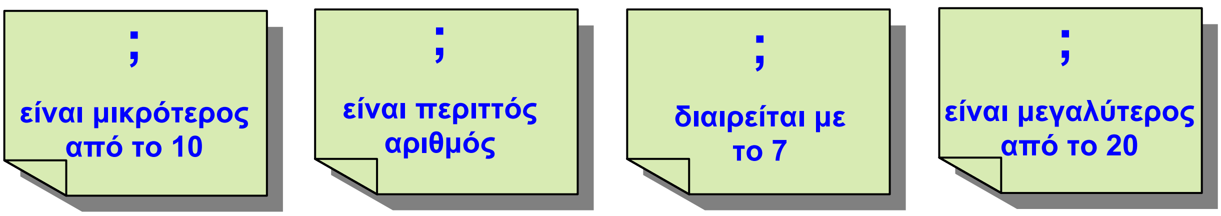
Ερωτήσεις 5 πόντων:

21) Το σχήμα δείχνει ένα πεντάγωνο αστέρι. Μερικές γωνίες είναι σημειωμένες. Πόσες μοίρες είναι η γωνία Α;

Α) 35° **Β)** 42° **Γ)** 50° **Δ)** 65° **Ε)** 109°



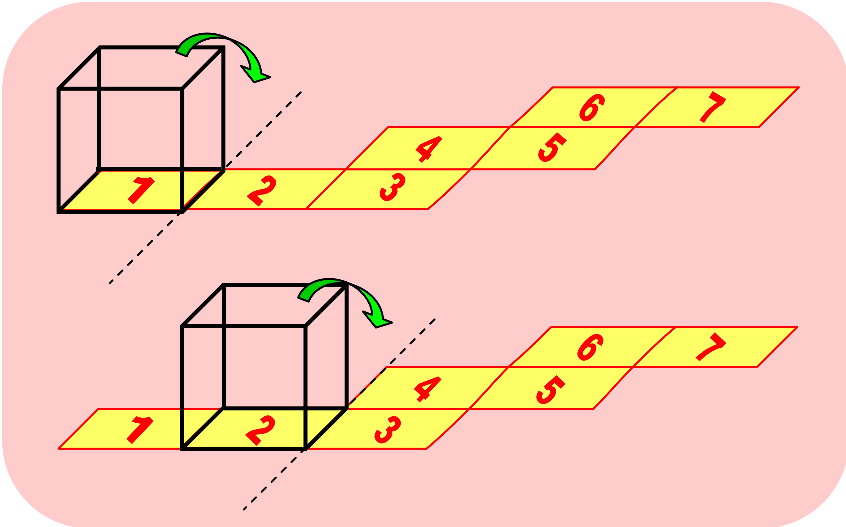
22) Στα τέσσερα χαρτιά της εικόνας είναι γραμμένοι με κάποια σειρά οι αριθμοί 2, 5, 7 και 12, ανά ένας στο κάθε χαρτί. Σε όλες τις περιπτώσεις ο αριθμός *δεν* αντιστοιχεί σε αυτό που δηλώνει η πρόταση στο ίδιο χαρτί.



Ποιος είναι ο αριθμός στο χαρτί με την πρόταση "είναι μεγαλύτερος από το 20";

Α) 2 **Β)** 5 **Γ)** 7 **Δ)** 12 **Ε)** δεν μπορούμε να ξέρουμε

23) Κυλάμε έναν κύβο στο επίπεδο, στρίβοντάς τον κατά μήκος μιας ακμής του. Ο κύβος παίρνει διαδοχικά τις θέσεις 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7, με αυτήν τη σειρά. Η έδρα που ήταν αρχικά η βάση του κύβου, πότε θα ξαναβρεθεί στη βάση του;



Α) όταν ο κύβος φτάσει στη θέση 3 **Β)** όταν ο κύβος φτάσει στη θέση 4
Γ) όταν ο κύβος φτάσει στη θέση 5 **Δ)** όταν ο κύβος φτάσει στη θέση 6
Ε) όταν ο κύβος φτάσει στη θέση 7

---

24) Χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6 μία φορά το καθένα, φτιάχνουμε δύο τριψήφιους αριθμούς έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι όσο γίνεται μικρότερο. Πόσο είναι αυτό το μικρότερο δυνατό άθροισμα;

Α) 246 **Β)** 333 **Γ)** 381 **Δ)** 471 **Ε)** 579

---

25) Στο πάρτι των καγκουρό βρέθηκαν λιγότερα από 50 καγκουρό. Κάποια στιγμή χόρευαν ορισμένα από τα καγκουρό σε ζευγάρια (ένα αρσενικό με ένα θηλυκό). Συγκεκριμένα, τα $\frac{3}{4}$ των αρσενικών καγκουρό χόρευαν με τα $\frac{4}{5}$ των θηλυκών. Πόσα καγκουρό χόρευαν εκείνη τη στιγμή;

Α) 20 **Β)** 24 **Γ)** 30 **Δ)** 32 **Ε)** 46

---

26) Στον πίνακα είναι γραμμένοι όλοι οι τριψήφιοι αριθμοί με μη μηδενικά ψηφία που έχουν τις εξής δύο ιδιότητες. α) Αν σβήσουμε το πρώτο ψηφίο τους, τότε αυτό που μένει είναι τέλειο τετράγωνο και β) αν σβήσουμε το τελευταίο ψηφίο τους, τότε αυτό που μένει είναι τέλειο τετράγωνο. Πόσο είναι το άθροισμα όλων αυτών των αριθμών στον πίνακα;

Α) 1013 **Β)** 1177 **Γ)** 1465 **Δ)** 1993 **Ε)** 2016

27) Οι δράκοι στο δάσος έχουν ένα από τρία χρώματα, πράσινο, κίτρινο ή καφέ. Τρία παιδιά προσπάθησαν να μαντέψουν τι χρώμα έχει ο δράκος στο γειτονικό δάσος. Οι μαντεψιές τους ήταν

- δεν είναι πράσινος,
- είναι ή κίτρινος ή καφέ,
- είναι κίτρινος

Αν τουλάχιστον ένα παιδί μάντεψε σωστά και τουλάχιστον ένα μάντεψε λάθος, τι χρώμα έχει ο δράκος;

Α) πράσινο **Β)** κίτρινο
Γ) ή πράσινο ή κίτρινο **Δ)** καφέ
Ε) δεν φτάνουν αυτές οι πληροφορίες για να απαντήσουμε

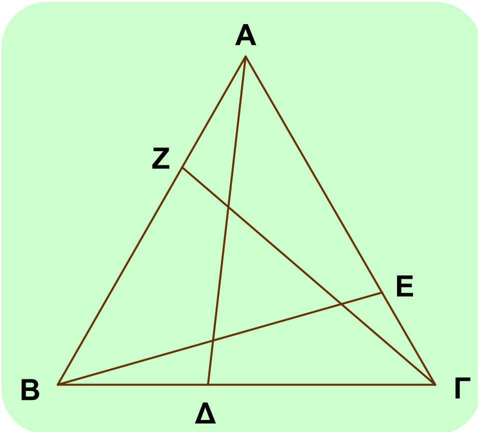
---

28) Ο Πυθαγόρας θέλει να χωρίσει τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7 σε δύο ομάδες έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών στη μία ομάδα να είναι ίσο με το άθροισμα των αριθμών στην άλλη. Με πόσους τρόπους μπορεί να το κάνει αυτό;

Α) 1 **Β)** 2 **Γ)** 3 **Δ)** 4 **Ε)** 5

---

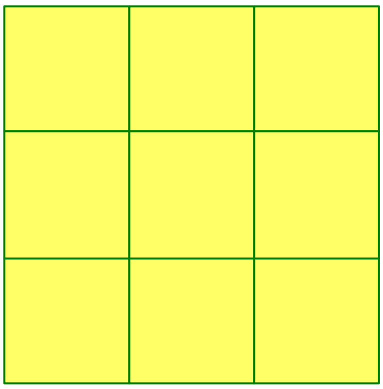
29) Τρίγωνο ΑΒΓ με περίμετρο 19 μέτρα τεμαχίστηκε από τα ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ σε 4 τρίγωνα και 3 τετράπλευρα. Το άθροισμα των περιμέτρων των τεσσάρων αυτών μικρότερων τριγώνων είναι 20 μέτρα και το άθροισμα των περιμέτρων των τριών τετραπλεύρων είναι 25 μέτρα. Πόσο είναι το άθροισμα ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ;



Α) 11 μέτρα **Β)** 12 μέτρα **Γ)** 13 μέτρα
Δ) 14 μέτρα **Ε)** 16 μέτρα

---

30) Στα τετραγωνάκια ενός 3×3 τετραγώνου τοποθετούμε από έναν θετικό αριθμό. Το γινόμενο των τριών αριθμών σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη είναι ίσο με 1, σε όλες τις περιπτώσεις. Το γινόμενο των τεσσάρων αριθμών σε κάθε 2×2 εσωτερικό τετράγωνο είναι ίσο με 2, σε όλες τις περιπτώσεις. Ποιος είναι ο αριθμός στο κεντρικό τετράγωνο;



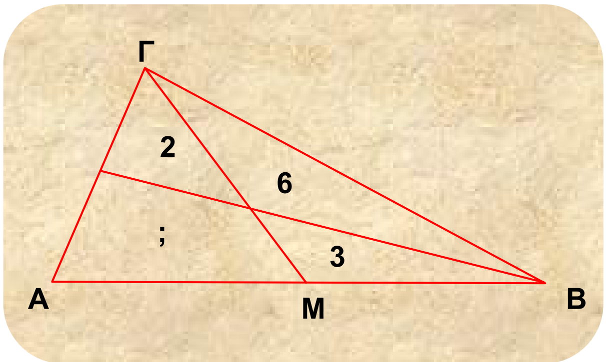
Α) 16 **Β)** 8 **Γ)** 4
Δ) $\frac{1}{4}$ **Ε)** $\frac{1}{8}$

Θέματα Καγκουρό 2012 Επίπεδο: 4

(για μαθητές της Γ' τάξης Γυμνασίου και Α' τάξης Λυκείου)

Ερωτήσεις 3 πόντων:

1) Το Μ είναι το μέσον της πλευράς ΑΒ του τριγώνου. Ορισμένα εμβαδά είναι σημειωμένα στο σχήμα. Πόσο είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου;

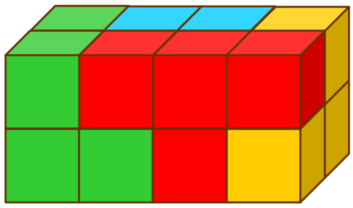


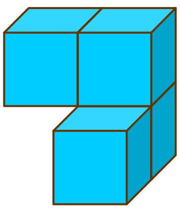
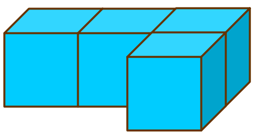
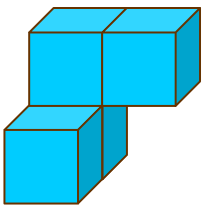
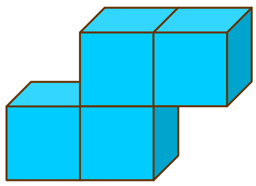
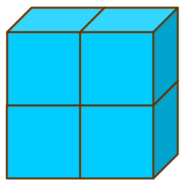
Α) 4 **Β)** 5 **Γ)** 6
Δ) 7 **Ε)** άλλη απάντηση

2) Ποιο είναι το αποτέλεσμα της πράξης $11{,}1+11{,}11-1{,}111-11{,}1$;

Α) 9,009 **Β)** 9,0909 **Γ)** 9,99 **Δ)** 9,999 **Ε)** 10

3) Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο της εικόνας είναι κατασκευασμένο από τέσσερα κομμάτια. Κάθε κομμάτι αποτελείται από 4 ίδιους κύβους και είναι μονόχρωμο (πράσινο, κίτρινο, κόκκινο ή γαλάζιο αντίστοιχα). Τι σχήμα έχει το γαλάζιο κομμάτι;

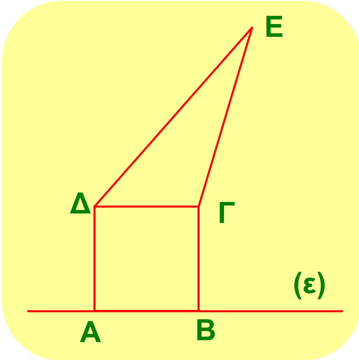


Α)

Β)

Γ)

Δ)

Ε)


4) Ο Μιλτιάδης και ο Θεμιστοκλής χρησιμοποιούν το εξής μυστικό κώδικα για μηνύματα: Πρώτα δίνουν αριθμητική τιμή στα γράμματα του αλφαβήτου γράφοντας με τη σειρά $Α=1$, $Β=2$, $Γ=3$ και λοιπά, μέχρι το $Ω=24$. Μετά μετατρέπουν τον κάθε αριθμό σε έναν νέο σύμφωνα με το τύπο $2\times$(αριθμός) + 9. Το μήνυμα είναι οι νέοι αυτοί αριθμοί στη σειρά. Σήμερα το μήνυμα έγραφε 19, 31, 25, 20. Τι έλεγε;

Α) ΕΛΘΕ **Β)** ΕΛΟΣ **Γ)** ΕΛΙΑ
Δ) ΕΛΕΑ **Ε)** Το μήνυμα ήταν λανθασμένο

5) Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 4 μέτρα και έχει εμβαδόν όσο το τρίγωνο ΓΔΕ. Πόσο απέχει το Ε από την ευθεία (ε);



Α) 8 μέτρα **Β)** $4+2\sqrt{3}$ μέτρα

Γ) 12 μέτρα **Δ)** $10\sqrt{2}$ μέτρα

Ε) Εξαρτάται από την θέση του Ε

---

6) Αν προσθέσουμε όλα τα ψηφία ενός επταψήφιου αριθμού, θα βρούμε 6. Πόσο είναι το γινόμενο των ψηφίων του αριθμού;

Α) 0 **Β)** 6 **Γ)** 7 **Δ)** $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$ **Ε)** 5

---

7) Το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές μήκους 6 και 8 μέτρων, αντίστοιχα. Τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ. Πόση είναι η περίμετρος του τριγώνου ΚΛΜ;

Α) 10 μ. **Β)** 12 μ. **Γ)** 15 μ. **Δ)** 20 μ. **Ε)** 24 μ.

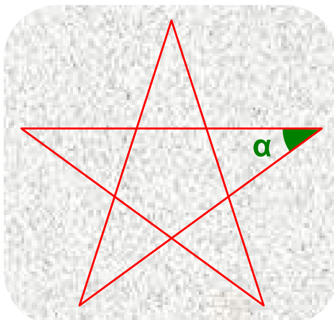
---

8) Ο Ευκλείδης έκανε τις αριθμητικές πράξεις που είναι σημειωμένες παρακάτω. Μετά έσβησε κάθε οκτάρι από τις παραστάσεις αυτές και στη θέση του έβαλε έναν θετικό αριθμό Α διαφορετικό από 8. Όταν ξαναέκανε τις αριθμητικές πράξεις (με τα Α στην θέση των οκτώ) παρατήρησε ότι σε τέσσερις από τις περιπτώσεις βρήκε το ίδιο τελικό αποτέλεσμα όπως την πρώτη φορά, ενώ στη πέμπτη περίπτωση βρήκε διαφορετική απάντηση. Σε ποια περίπτωση βρήκε διαφορετική απάντηση;

Α) $\dfrac{8+8-8}{8}$ **Β)** $8+\dfrac{8}{8}-8$ **Γ)** $\dfrac{8}{8+8+8}$ **Δ)** $(8+8)^{8-8}$ **Ε)** $8-\dfrac{8}{8}+8$

---

9) Προεκτείνουμε τις πλευρές κανονικού πενταγώνου μέχρι να σχηματίσουν ένα αστέρι, όπως στο σχήμα. Πόσες μοίρες είναι η γωνία α;



Α) 24° **Β)** 30° **Γ)** 36° **Δ)** 45° **Ε)** 72°

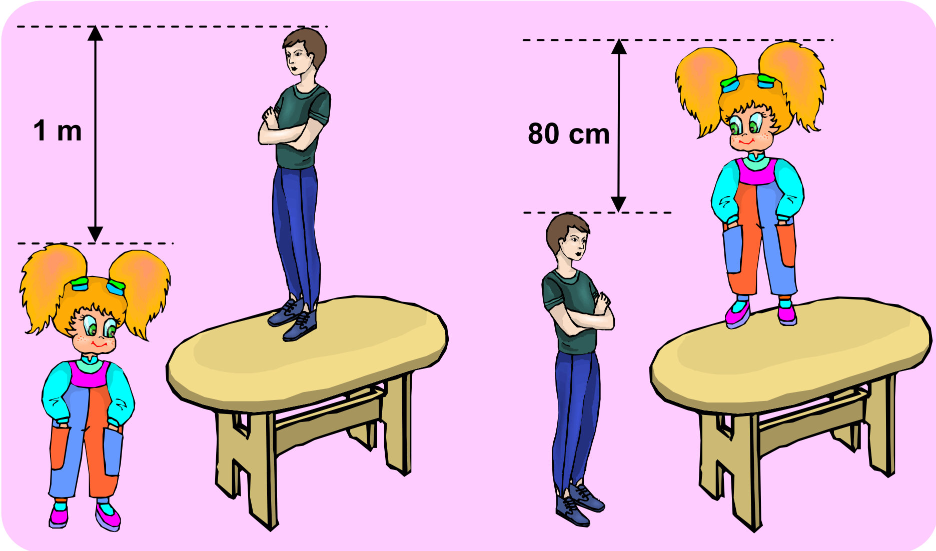
---

10) Ο Αρχιμήδης έγραψε όλους τους τριψήφιους αριθμούς που έχουν άθροισμα ψηφίων ίσο με 3. Πόσους τριψήφιους αριθμούς έγραψε;

Α) 2 **Β)** 3 **Γ)** 4 **Δ)** 5 **Ε)** 6

Ερωτήσεις 4 πόντων:

11) Ένα αγόρι παίζει με την αδερφή του. Αν το αγόρι σταθεί στο τραπέζι και το κορίτσι στο πάτωμα, τότε το αγόρι είναι 1 μέτρο πιο ψηλό από το κορίτσι. Αν το κορίτσι σταθεί στο τραπέζι και το αγόρι στο πάτωμα, τότε το κορίτσι είναι 80 εκατοστά πιο ψηλό από το αγόρι. Πόσο είναι το ύψος του τραπεζιού;



Α) 20 εκ. **Β)** 80 εκ. **Γ)** 90 εκ. **Δ)** 100 εκ. **Ε)** 120 εκ.

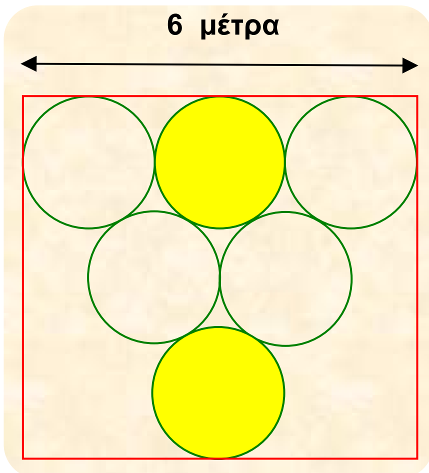
12) Ποιο είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του αριθμού $2^{55} \times 3^{4} \times 5^{53}$ όταν γραφεί στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης;

Α) 1 **Β)** 2 **Γ)** 4 **Δ)** 6 **Ε)** 9

13) Ένα καγκουρό και ένας πιγκουΐνος ρίχνουν ένα κέρμα. Αν έρθει «κεφάλι», τότε κερδίζει το καγκουρό και ο πιγκουΐνος του δίνει 2 καραμέλες. Αν έρθει «γράμματα», τότε κερδίζει ο πιγκουΐνος και το καγκουρό του δίνει 3 καραμέλες. Έπαιξαν 30 φορές και στο τέλος ο καθένας είχε τόσες καραμέλες όσες είχε στην αρχή. Πόσες φορές κέρδισε ο πιγκουΐνος;

Α) 6 **Β)** 12 **Γ)** 18 **Δ)** 24 **Ε)** 30

14) Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει βάση 6 μέτρων. Ζωγραφίζουμε κύκλους που εφάπτονται στο ορθογώνιο και μεταξύ τους, όπως στο σχήμα. Πόση είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ των σημείων του ενός κίτρινου κύκλου από τον άλλον;



Α) 1 μ. **Β)** $\sqrt{2}$ μ. **Γ)** $2\sqrt{3}-2$ μ. **Δ)** $\frac{\pi}{2}$ μ. **Ε)** 2 μ.

15) Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι εκατό αριθμοί 1, 11, 111, ... , $\underbrace{111\ldots11}_{100\ \text{ψηφία}}$ και οι εκατό αριθμοί 1×2, $1\times2\times3$, ... , $1\times2\times3\times\ldots\times101$. Αν τους προσθέσουμε όλους μαζί και μετά διαιρέσουμε το άθροισμα δια 5, τι υπόλοιπο θα βρούμε;

Α) 0 **Β)** 1 **Γ)** 2 **Δ)** 3 **Ε)** 4

---

16) Ο κύριος Ρολογόπουλος έχει τρία ρολόγια. Κανένα δεν δείχνει την σωστή ώρα. Κάποια πάνε γρηγορότερα και τα υπόλοιπα χάνουν. Το πρώτο πάει λάθος κατά 2 λεπτά, το δεύτερο κατά 3 και το τρίτο κατά 4 λεπτά. Κάποια στιγμή ο κύριος Ρολογόπουλος κοίταξε τα ρολόγια του. Έδειχναν (με κάποια σειρά) 12 η ώρα, 12 η ώρα και 5 λεπτά και 12 η ώρα και 7 λεπτά. Τι ώρα ήταν εκείνη τη στιγμή;

Α) 12 η ώρα και 2 λεπτά **Β)** 12 η ώρα και 3 λεπτά **Γ)** 12 η ώρα και 4 λεπτά
Δ) 12 η ώρα και 5 λεπτά **Ε)** κανένα από τα προηγούμενα

---

17) Όταν οι αριθμοί 144 και 220 διαιρεθούν με έναν φυσικό αριθμό Ν, δίνουν και οι δύο υπόλοιπο 11. Ποιος είναι ο Ν;

Α) 7 **Β)** 11 **Γ)** 15 **Δ)** 19 **Ε)** 38

---

18) Τοποθετούμε από έναν αριθμό στα τετραγωνάκια του διπλανού πίνακα έτσι ώστε α) το άθροισμα των αριθμών σε κάθε γραμμή να είναι το ίδιο και β) το άθροισμα των αριθμών σε κάθε στήλη να είναι το ίδιο (αλλά ίσως διαφορετικό από το άθροισμα των γραμμών). Μερικοί αριθμοί έχουν ήδη τοποθετηθεί. Ποιος αριθμός πρέπει να γραφεί στο πράσινο τετραγωνάκι;

2	4		2
	3	3	
6		1	

Α) 1 **Β)** 4 **Γ)** 6 **Δ)** 8 **Ε)** 9

---

19) Ένα χαρτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου έχει διαστάσεις 192×84 mm. Κόβουμε με το ψαλίδι κατά μήκος μίας παράλληλης προς μία από τις πλευρές του για να φτιάξουμε ένα τετράγωνο. Πετάμε το τετράγωνο και με το υπόλοιπο κομμάτι επαναλαμβάνουμε την διαδικασία όσες φορές χρειάζεται. Πόση είναι η πλευρά του μικρότερου δυνατού τετραγώνου που θα καταλήξουμε στο τέλος;

Α) 1 mm **Β)** 4 mm **Γ)** 6 mm **Δ)** 10 mm **Ε)** 12 mm

20) Τρία καγκουρό, ο Κα, ο Γκου και ο Ρο, πήραν μέρος σε έναν αγώνα δρόμου. Πριν από τον αγώνα, τέσσερις φίλοι τους έκαναν τις εξής προβλέψεις:

Ο πρώτος: Είτε ο Κα είτε ο Γκου θα νικήσει.

Ο δεύτερος: Αν ο Γκου βγει δεύτερος, τότε θα κερδίσει ο Ρο.

Ο τρίτος: Αν ο Γκου έλθει τρίτος, τότε ο Κα δε θα κερδίσει.

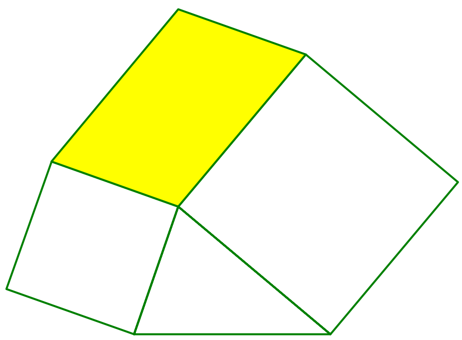
Ο τέταρτος: Είτε ο Γκου είτε ο Ρο θα βγει δεύτερος.

Μετά τον αγώνα διαπιστώθηκε ότι όλες οι προβλέψεις βγήκαν σωστές. Με ποια σειρά τερμάτισαν τα τρία καγκουρό;

Α) Κα, Γκου, Ρο **Β)** Κα, Ρο, Γκα **Γ)** Ρο, Γκου, Κα **Δ)** Γκου, Ρο, Κα **Ε)** Γκου, Κα, Ρο

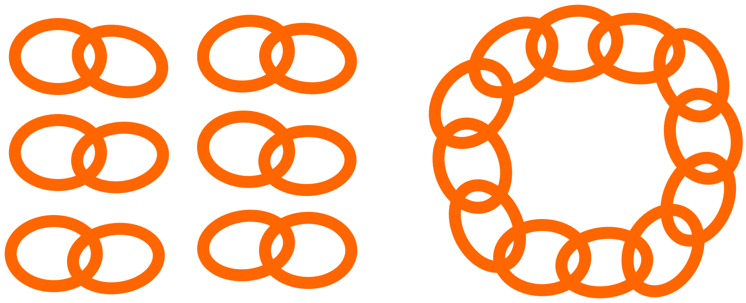
Ερωτήσεις 5 πόντων:

21) Το σχήμα αποτελείται από δύο τετράγωνα με πλευρές 4 cm και 5 cm, αντίστοιχα, ένα τρίγωνο με εμβαδόν 8 cm^2 και το κίτρινο παραλληλόγραμμο. Πόσο είναι το εμβαδόν του κίτρινου παραλληλογράμμου;



Α) 15 cm^2 **Β)** 16 cm^2 **Γ)** 18 cm^2 **Δ)** 20 cm^2 **Ε)** 21 cm^2

22) Ένας σιδεράς έχει 6 κομμάτια αλυσίδας που αποτελούνται από δύο κρίκους ο καθένας. Θέλει να φτιάξει μία μεγάλη αλυσίδα. Θα χρειαστεί να ανοίξει μερικούς κρίκους (και να τους κλείσει αργότερα) για να συνδέσει την αλυσίδα. Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός κρίκων που πρέπει να ανοίξει;



Α) 4 **Β)** 5 **Γ)** 6 **Δ)** 12 **Ε)** άλλη απάντηση

23) Σε ένα τουρνουά ποδοσφαιρικών αγώνων, ο νικητής ενός παιχνιδιού κερδίζει 3 πόντους, ο ηττημένος παίρνει 0 πόντους ενώ στις ισοπαλίες η κάθε ομάδα κερδίζει από 1 πόντο. Μία ομάδα έπαιξε 38 αγώνες και η συνολική βαθμολογία της ήταν 80 πόντοι. Πόσο είναι το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος αγώνων που μπορεί να έχασε η ομάδα;

Α) 12 **Β)** 11 **Γ)** 10 **Δ)** 9 **Ε)** 8

24) Ο Θαλής έχει 5 γλόμπους με διακόπτη. Κάθε φορά που πατάει τον διακόπτη για να αλλάξει την κατάσταση ενός από τους γλόμπους (δηλαδή αν είναι αναμμένος να τον σβήσει ή το ανάποδο), τότε ένας φίλος του πατάει τον διακόπτη για να αλλάζει την κατάσταση ενός άλλου από τους γλόμπους. Στην αρχή όλοι οι γλόμποι είναι σβηστοί. Μετά ο Θαλής πάτησε 10 φορές συνολικά τους διακόπτες. Ποιο από τα παρακάτω είναι αλήθεια στο τέλος;

Α) είναι αδύνατο να είναι σβηστοί όλοι οι γλόμποι,

Β) σίγουρα όλοι οι γλόμποι θα είναι αναμμένοι,

Γ) είναι αδύνατο να είναι αναμμένοι όλοι οι γλόμποι,

Δ) σίγουρα όλοι οι γλόμποι θα είναι σβηστοί,

Ε) κανένα από τα προηγούμενα δεν είναι σωστό.

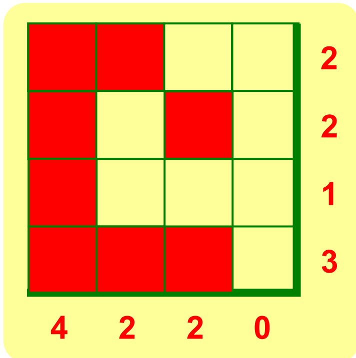
---

25) Ο Διόφαντος έγραψε την ισότητα $20 = m^m(m^n - n)$ για φυσικούς αριθμούς m και n. Ποιος είναι ο n;

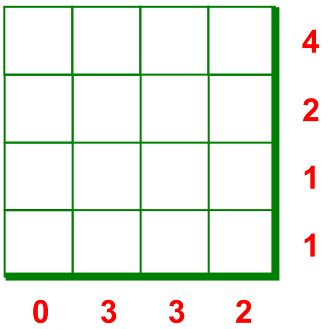
Α) 2 **Β)** 3 **Γ)** 4 **Δ)** 5 **Ε)** κανένας από τους προηγούμενους

---

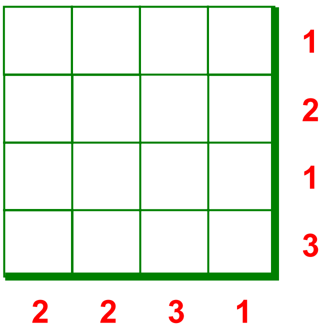
26) Μερικά τετραγωνάκια ενός 4×4 πίνακα βάφονται κόκκινα. Μετά γράφουμε στο περιθώριο του πίνακα το πλήθος των κόκκινων τετραγώνων στην αντίστοιχη γραμμή ή στήλη. Ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται δεξιά. Ένας καλλιτέχνης έκανε τη δική του ζωγραφιά (διαφορετική από το παράδειγμα) και μετά έσβησε τα κόκκινα τετραγωνάκια. Το αποτέλεσμα ήταν ένα από τα παρακάτω σχήματα. Ποιο από τα παρακάτω είναι το μόνο που θα μπορούσε να είναι το αποτέλεσμα της ζωγραφιάς του;



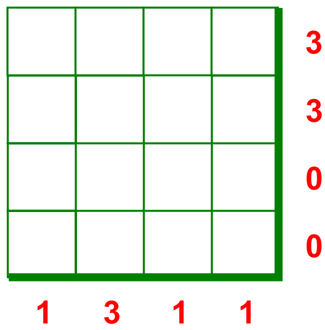
Α)



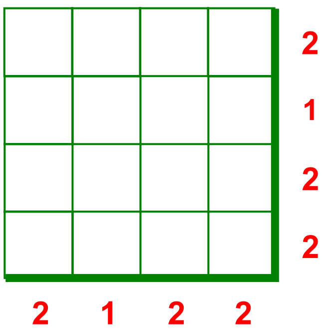
Β)



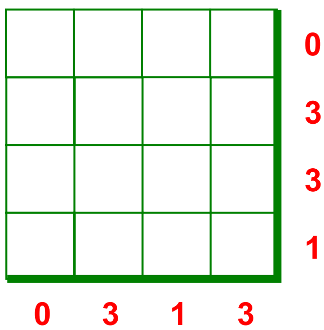
Γ)



Δ)



Ε)



27) Ποια από τις παρακάτω σχέσεις αληθεύει για τον αριθμό $K=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}$;

Α) $0<K\le 1$ **Β)** $0{,}5\le K\le 1{,}5$ **Γ)** $1\le K\le 2$ **Δ)** $2<K\le 3$ **Ε)** $K>3$

---

28) Σε ένα χαρτί είναι γραμμένα όλα τα γινόμενα της μορφής $m\times n$, όπου οι m, n είναι φυσικοί αριθμοί με $1\le m\le 9$, $1\le n\le 9$. Πόσο είναι το άθροισμα όλων αυτών των αριθμών;

Α) 45 **Β)** 81 **Γ)** 45^2 **Δ)** 2^{45} **Ε)** κανένα από τα προηγούμενα

---

29) Οι αριθμοί από το 1 έως το 120 είναι γραμμένοι σε έναν πίνακα με 15 γραμμές, όπως δείχνει η εικόνα (στην εικόνα βλέπουμε μόνο ένα μέρος του πίνακα). Ο Πυθαγόρας πρόσθεσε όλους τους αριθμούς κάθε στήλης χωριστά. Ποιας στήλης (μετρώντας από αριστερά) το άθροισμα που βρήκε είναι το μεγαλύτερο;

1						
2	3					
4	5	6				
7	8	9	10			
11	12	13	14	15		
…	…	…	…	…	…	
106	107	108	109	110	…	120

Α) της 1ης στήλης **Β)** της 5ης στήλης **Γ)** της 7ης στήλης
Δ) της 10ης στήλης **Ε)** της 13ης στήλης

---

30) Έβαλα στον νου μου δύο συνεχόμενους αριθμούς (όπως το 6 και το 7, αλλά όχι αυτούς). Είπα στην Άννα τον έναν από τους δύο αριθμούς και στον Βασίλη τον άλλον. Ο καθένας ξέρει τον δικό του αριθμό, αλλά όχι του άλλου και ξέρει ότι οι δύο αριθμοί είναι συνεχόμενοι. Μετά ένας περαστικός άκουσε τον εξής διάλογο:

Άννα προς Βασίλη: Χμμ, δεν μπορώ να είμαι απόλυτα σίγουρη για τον αριθμό που έχεις.

Βασίλης προς Άννα: Ούτε εγώ είμαι απόλυτα σίγουρος.

Άννα προς Βασίλη: Πολλή ωραία, τώρα που το λες αυτό, είμαι απόλυτα σίγουρη για τον αριθμό που έχεις και ξέρω ότι είναι διαιρέτης του 20.

Ποιος είναι ο αριθμός της Άννας;

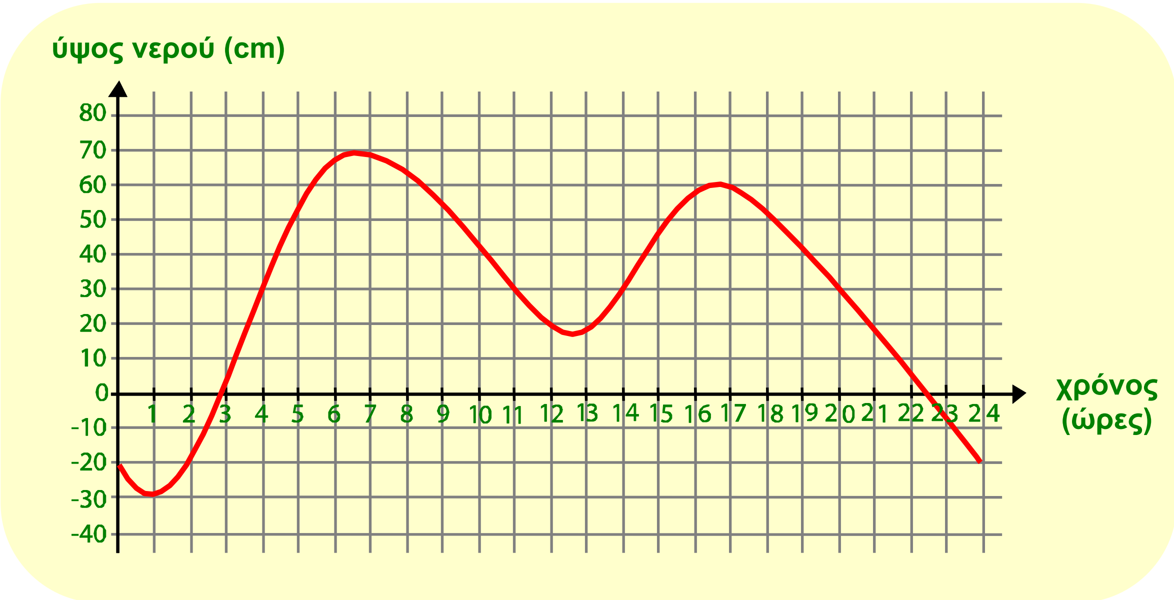
Α) 2 **Β)** 3 **Γ)** 4 **Δ)** 5 **Ε)** 6

Θέματα Καγκουρό 2012 Επίπεδο: 5

(για μαθητές της Β' και Γ' τάξης Λυκείου)

Ερωτήσεις 3 πόντων:

1) Το ύψος σε cm της επιφάνειας του νερού σε ένα λιμάνι αυξομειώνεται σύμφωνα με το παρακάτω διάγραμμα. Πόσες ώρες της ημέρας το ύψος του νερού ήταν μεγαλύτερο από 30 cm;



Α) 5 **Β)** 6 **Γ)** 7 **Δ)** 9 **Ε)** 13

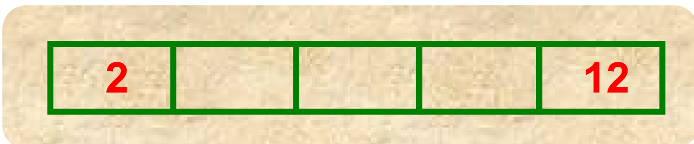
---

2) Με πόσο ισούται ο αριθμός $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$;

Α) 1 **Β)** $\sqrt{2}$ **Γ)** $\sqrt[6]{4}$ **Δ)** $\sqrt[3]{4}$ **Ε)** 2

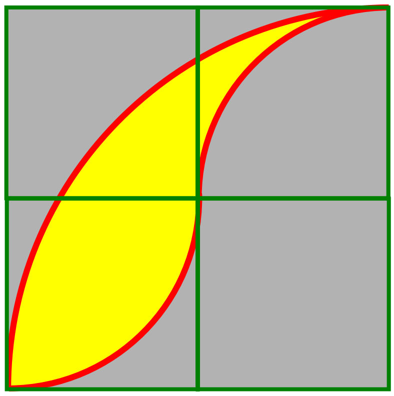
---

3) Ο Διόφαντος θέλει να βάλει από έναν αριθμό στα τρία άδεια κουτάκια του διπλανού σχήματος. Θέλει το γινόμενο των τριών πρώτων αριθμών του σχήματος να είναι 30, το γινόμενο των τριών μεσαίων να είναι 90 και το γινόμενο των τριών τελευταίων να είναι 360. Ποιον αριθμό πρέπει να βάλει στο μεσαίο κουτάκι;



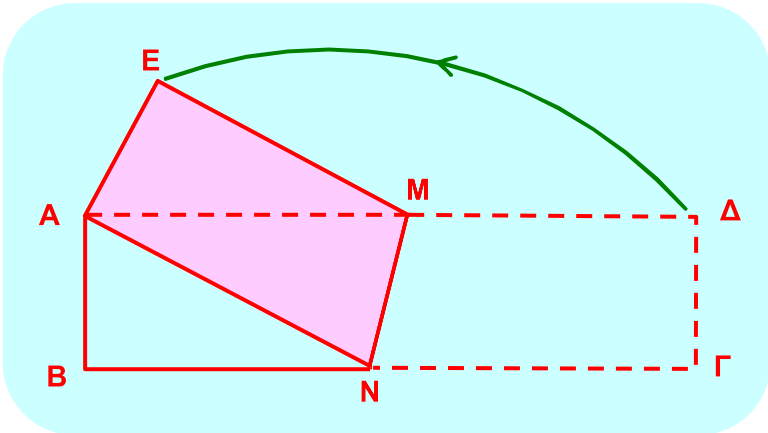
Α) 3 **Β)** 4 **Γ)** 5 **Δ)** 6 **Ε)** 10

4) Ο τοίχος αποτελείται από 4 τετράγωνα με πλευρά 1 μέτρο. Ο καλλιτέχνης έβαψε κίτρινο ένα τμήμα του τοίχου (οι καμπύλες είναι τεταρτοκύκλια). Πόσο είναι το εμβαδόν του τμήματος που έβαψε;



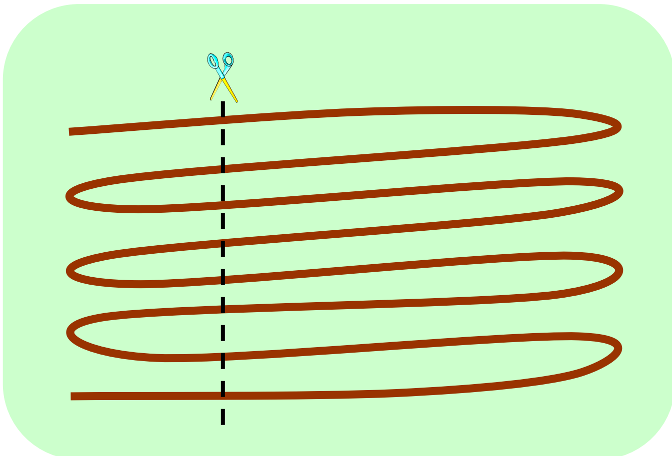
Α) $\frac{\pi+2}{4}$ τ.μ. **Β)** $\pi-2$ τ.μ. **Γ)** $\frac{2\pi-1}{4}$ τ.μ. **Δ)** $\frac{2\pi+3}{4}$ τ.μ. **Ε)** $16(\pi-2)$ τ.μ.

5) Ένα κομμάτι χαρτί ΑΒΓΔ σχήματος ορθογωνίου διαστάσεων $4\text{cm}\times 16\text{cm}$ διπλώνεται κατά μήκος της ευθείας ΜΝ έτσι ώστε η κορυφή Γ να συμπέσει με την Α, όπως στην εικόνα. Πόσο είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΝΜΕ;



Α) 28 cm^2 **Β)** 30 cm^2 **Γ)** 32 cm^2 **Δ)** 48 cm^2 **Ε)** 56 cm^2

6) Ένα κομμάτι σπάγκου είναι διπλωμένο όπως δείχνει η εικόνα. Κόβουμε τον σπάγκο με μία κάθετη ψαλιδιά για να τον χωρίσουμε σε μικρότερα κομμάτια. Τώρα ένα από τα κομμάτια έχει μήκος 9 cm και ένα δεύτερο έχει μήκος 4 cm. Ποιο από τα παρακάτω *δεν* μπορεί να είναι το αρχικό μήκος του σπάγκου; (Η ψαλιδιά στο σχήμα δεν είναι στην ακριβή της θέση).



Α) 52 cm **Β)** 68 cm **Γ)** 72 cm **Δ)** 88 cm **Ε)** όλα τα προηγούμενα είναι πιθανά

7) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός n με $n^{200} < 5^{300}$;

Α) 5 **Β)** 6 **Γ)** 8 **Δ)** 11 **Ε)** 12

8) Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιεί την ισότητα $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$, για τα x που έχουν νόημα οι παραστάσεις;

Α) $f(x)=\frac{2}{x}$ **Β)** $f(x)=\frac{1}{x+1}$ **Γ)** $f(x)=1+\frac{1}{x}$ **Δ)** $f(x)=\frac{1}{x}$ **Ε)** $f(x)=x+\frac{1}{x}$

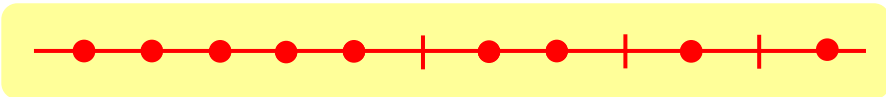
---

9) Ένας πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τις ανισότητες $x^3<64<x^2$. Ποια από τις παρακάτω είναι σίγουρα σωστή;

Α) $0<x<64$ **Β)** $-8<x<4$ **Γ)** $x>8$ **Δ)** $-4<x<8$ **Ε)** $x<-8$

---

10) Στην πραγματική ευθεία είναι σημειωμένοι με ● εννέα φυσικοί αριθμοί (βλέπε την εικόνα). Γνωρίζουμε για αυτούς ότι α) είναι μεγαλύτεροι από τον 93 και μικρότεροι από τον 112 και β) ακριβώς τρεις είναι πολλαπλάσια του 4.



Ποιος είναι ο μεγαλύτερος από αυτούς τους 9 αριθμούς;

Α) 100 **Β)** 102 **Γ)** 104 **Δ)** 106 **Ε)** 108

Ερωτήσεις 4 πόντων:

---

11) Η ηλικία μου είναι διψήφιος αριθμός ο οποίος είναι δύναμη του 5. Η ηλικία του θείου μου είναι διψήφιος αριθμός ο οποίος είναι δύναμη του 2. Το άθροισμα των (τεσσάρων) ψηφίων των ηλικιών μας είναι περιττός αριθμός. Πόσο είναι το γινόμενο των ψηφίων των ηλικιών μας;

Α) 240 **Β)** 2010 **Γ)** 60 **Δ)** 50 **Ε)** 300

---

12) Από ένα γκρουπ 100 τουριστών, οι 90 επισκέφθηκαν το Αρχαιολογικό Μουσείο, οι 90 το Βυζαντινό Μουσείο και οι 90 το Λαογραφικό Μουσείο. Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός τουριστών που επισκέφθηκαν και τα τρία αυτά αξιοθέατα;

Α) 90 **Β)** 85 **Γ)** 80 **Δ)** 75 **Ε)** 70

---

13) Ποιο είναι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $|x|+|x-3|>3$;

Α) $(-\infty, 0)\cup(3, +\infty)$ **Β)** $(-3, 3)$ **Γ)** $(-\infty, -3)$

Δ) $(-3, +\infty)$ **Ε)** όλοι οι πραγματικοί αριθμοί

14) Τα παιδιά μιας τάξης έχουν στη τσάντα τους, το καθένα, από 1 έως 5 βιβλία. Ο μέσος όρος των βιβλίων όλων μαζί των μαθητών της τάξης είναι 4. Ο μέσος όρος των βιβλίων των αγοριών είναι 3,6 και των κοριτσιών είναι 4,2. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό για τα παιδιά της τάξης αυτής;

Α) Τα αγόρια είναι διπλάσια από τα κορίτσια

Β) Τα αγόρια είναι τετραπλάσια από τα κορίτσια

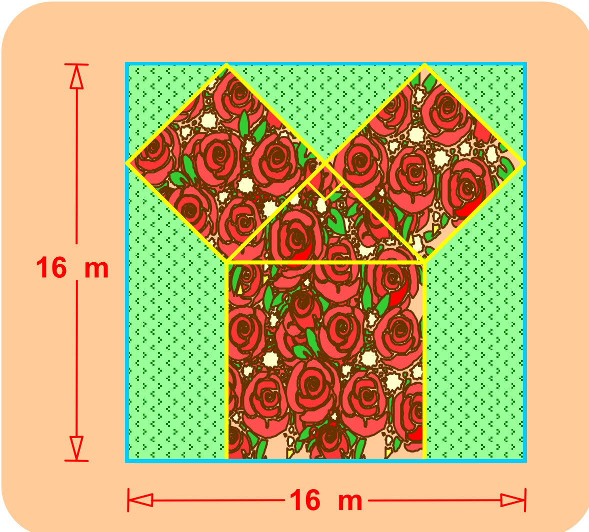
Γ) Τα κορίτσια είναι διπλάσια από τα αγόρια

Δ) Τα κορίτσια είναι τετραπλάσια από τα αγόρια

Ε) Τα κορίτσια είναι όσα τα αγόρια

---

15) Οι εικόνα δείχνει έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 16 μέτρων. Τα τριαντάφυλλα έχουν φυτευτεί σε μια περιοχή η οποία (βλέπε το σχήμα) αποτελείται από ένα ορθογώνιο τρίγωνο και τα τρία τετράγωνα στις πλευρές του. Πόσο είναι το εμβαδόν της περιοχής του κήπου με τα τριαντάφυλλα;



Α) 114 m^2 **Β)** 130 m^2 **Γ)** 144 m^2 **Δ)** 160 m^2 **Ε)** 186 m^2

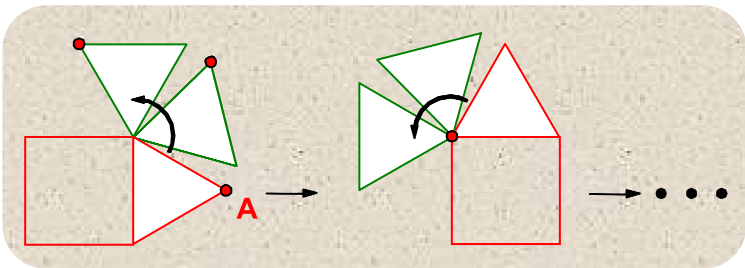
---

16) Κάποια μέρα η μύτη του Πινόκιο είχε μήκος 8 cm. Κάθε φορά που ο Πινόκιο έλεγε την αλήθεια, η μύτη μίκραινε κατά 2 cm ενώ κάθε φορά που έλεγε ψέματα η μύτη διπλασιαζόταν σε μήκος. Εκείνη την ημέρα ο Πινόκια είπε δύο φορές την αλήθεια και δύο φορές ψέματα (αλλά όχι κατ' ανάγκη με αυτή την σειρά). Ποιο είναι το μεγαλύτερο δυνατό μήκος που θα μπορούσε να φτάσει η μύτη του εκείνη την μέρα;

Α) 22 cm **Β)** 24 cm **Γ)** 26 cm **Δ)** 28 cm **Ε)** 30 cm

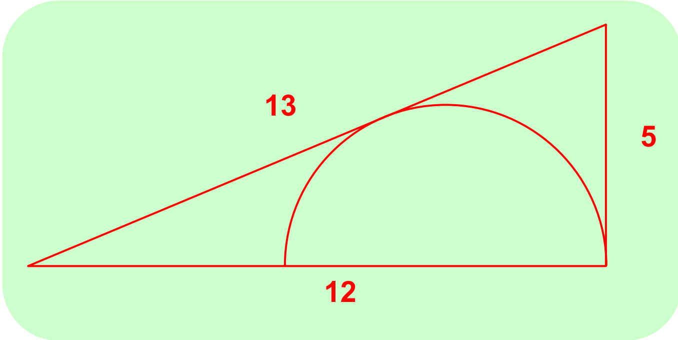
---

17) Ένα ισόπλευρο τρίγωνο περιστρέφεται γύρω από ένα τετράγωνο πλευράς 1, όπως στην εικόνα. Πόσο είναι το μήκος της καμπύλης που θα διαγράψει το σημείο Α όταν το σημείο αυτό επιστρέψει για πρώτη φορά στην αρχική του θέση;



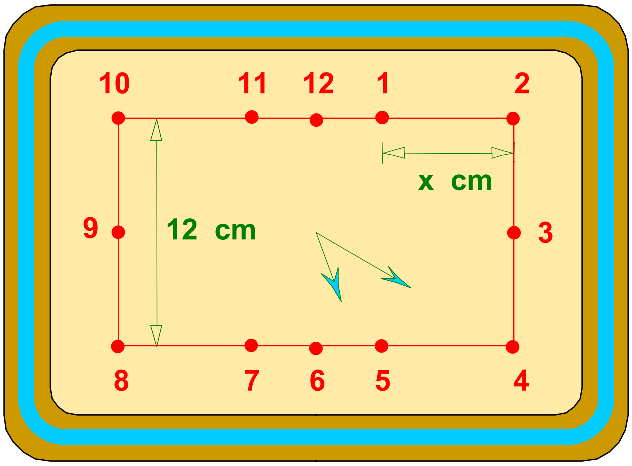
Α) 4π **Β)** $\frac{19\pi}{6}$ **Γ)** 8π **Δ)** $\frac{14\pi}{3}$ **Ε)** $\frac{21\pi}{2}$

18) Η εικόνα δείχνει ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 5, 12 και 13 και ένα ημικύκλιο που εφάπτεται στις πλευρές του. Πόση είναι η ακτίνα του ημικυκλίου;



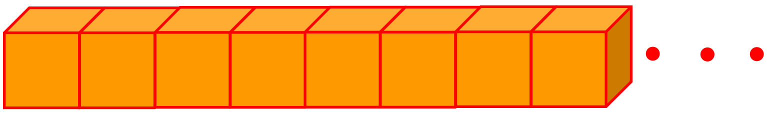
Α) $\frac{7}{3}$ **Β)** $\frac{10}{3}$ **Γ)** $\frac{12}{3}$ **Δ)** $\frac{13}{3}$ **Ε)** $\frac{17}{3}$

19) Ένα ρολόι έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Πόση είναι η απόσταση x, πάνω στο καντράν, μεταξύ των ψηφίων 1 και 2, αν η απόσταση μεταξύ των 8 και 10 είναι 12 cm;



Α) $3\sqrt{3}$ **Β)** $2\sqrt{3}$ **Γ)** $4\sqrt{3}$ **Δ)** $2+\sqrt{3}$ **Ε)** $12-3\sqrt{3}$

20) Ένα καγκουρό θέλει να φτιάξει μία μακρόστενη κατασκευή από ζάρια (στα ζάρια το άθροισμα των αριθμών στις απέναντι έδρες είναι 7). Ένα τμήμα της κατασκευής φαίνεται στο σχήμα. Επιτρέπεται να κολλήσει δύο έδρες μόνο αν έχουν τον ίδιο αριθμό. Θέλει το άθροισμα όλων των αριθμών στην εξωτερική μεριά της κατασκευής (πάνω, κάτω, μπρος, πίσω, δεξιά, αριστερά) να είναι 220. Πόσα ζάρια θα χρειαστεί;



Α) 7 **Β)** 8 **Γ)** 14 **Δ)** 15 **Ε)** κατασκευή με άθροισμα 220 είναι αδύνατη

Ερωτήσεις 4 πόντων:

21) Στον πίνακα είναι γραμμένοι 20 αριθμοί. Σχηματίζουμε όλα τα δυνατά γινόμενα οποιωνδήποτε δύο από αυτούς (το γινόμενο των α και β το μετράμε μία φορά, όχι ως αβ και βα). Αν ακριβώς 77 από αυτά τα γινόμενα είναι αρνητικά, πόσοι από τους αρχικούς αριθμούς είναι ίσοι με 0;

Α) 1 **Β)** 2 **Γ)** 3 **Δ)** 7 **Ε)** 11

22) Έστω Ν ο πιο μικρός φυσικός αριθμός (γραμμένος στο δεκαδικό σύστημα) ο οποίος έχει την ιδιότητα: Η προσθήκη του ψηφίου 1 στην αρχή του τον κάνει 9 φορές μεγαλύτερο.
Ποιο από τα παρακάτω αληθεύει για τον Ν;

Α) $N \le 27$ **Β)** $27 < N \le 81$ **Γ)** $81 < N \le 243$
Δ) $243 < N \le 729$ **Ε)** δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός

---

23) Οι αριθμοί α, β, γ, δ και ε είναι οι 2, 3, 4, 5 και 6 αλλά όχι κατ' ανάγκη με αυτή τη σειρά. Αν $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \delta^2 + \varepsilon^2$, με πόσο ισούται το $\alpha + \beta + \gamma$;

Α) 7 **Β)** 8 **Γ)** 9 **Δ)** 10 **Ε)** 11

---

24) Ένα περίεργο κομπιουτεράκι μπορεί να κάνει μόνο δύο ειδών πράξεις με κλάσματα. α) Να αυξήσει τον αριθμητή του κατά 8 μονάδες και β) να αυξήσει τον παρονομαστή του κατά 7 μονάδες. Ξεκινώντας από το κλάσμα $\frac{7}{8}$ και κάνοντας διαδοχικά, με κάποια σειρά, τις παραπάνω πράξεις Ν φορές συνολικά, κατέληξε σε κλάσμα ίσο με το $\frac{7}{8}$. Ποια είναι η μικρότερη δυνατή τιμή του Ν;

Α) 56 **Β)** 81 **Γ)** 109 **Δ)** 113
Ε) Ποτέ δε θα βρει ξανά κλάσμα ίσο με $\frac{7}{8}$

---

25) Ο Πυθαγόρας έγραψε στον πίνακα διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς αρχίζοντας από το 1. Μετά πρόσθεσε τους αριθμούς που έγραψε. Όμως έκανε λάθος και κάποιον αριθμό τον πρόσθεσε δύο φορές. Αν το άθροισμα που βρήκε ήταν 220, ποιον αριθμό πρόσθεσε δύο φορές;

Α) 10 **Β)** 20 **Γ)** 30
Δ) 155 **Ε)** κανένα από τα προηγούμενα

---

26) Πόσες αναδιατάξεις (x_1, x_2, x_3, x_4) του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$ υπάρχουν έτσι ώστε η παράσταση $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ να είναι πολλαπλάσιο του 3; (Σημείωση: Αναδιάταξη σημαίνει διευθέτηση των $\{1, 2, 3, 4\}$ με οποιαδήποτε σειρά, όπως (2, 1, 3, 4), (3, 4, 2, 1), (1, 2, 3, 4) και λοιπά, οι οποίες θεωρούνται διαφορετικές.)

Α) 8 **Β)** 12 **Γ)** 14 **Δ)** 16 **Ε)** 24

27) Στον πίνακα είναι ζωγραφισμένα το γράφημα της παραβολής $y = x^2$ και 2012 ευθείες παράλληλες της $y = x$, κάθε μία από τις οποίες τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία. Πόσο είναι το άθροισμα των τετμημένων όλων αυτών των κοινών σημείων;

Α) 0 **Β)** 1 **Γ)** 1006 **Δ)** 2012 **Ε)** δεν μπορούμε να ξέρουμε

---

28) Γράφουμε διαδοχικά μία ακολουθία αριθμών που ξεκινά ως 1, 1, 0, 1, -1,... Οι δύο πρώτοι είναι ο $a_1 = 1$ και ο $a_2 = 1$. Ο τρίτος όρος είναι ίσος με την διαφορά των δύο προηγούμενών του, δηλαδή $a_3 = a_1 - a_2$. Ο τέταρτος είναι ίσος με το άθροισμα των δύο προηγούμενών του, $a_4 = a_2 + a_3$. Κατόπιν συνεχίζουμε με το ίδιο μοτίβο, δηλαδή $a_5 = a_3 - a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$, και λοιπά (εναλλάξ διαφορά και άθροισμα). Πόσο είναι το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της ακολουθίας;

Α) 0 **Β)** 3 **Γ)** -21 **Δ)** 100 **Ε)** -1

---

29) Ο Διόφαντος επέλεξε δύο αριθμούς Χ και Υ από το σύνολο $\{1, 2, 3, \ldots, 17\}$. Το γινόμενο ΧΥ ισούται με το άθροισμα των υπόλοιπων 15 αριθμών του συνόλου. Πόση είναι η τιμή του $X + Y$;

Α) 23 **Β)** 25 **Γ)** 27 **Δ)** 29 **Ε)** δεν μπορούμε να ξέρουμε

---

30) Κάθε γάτα στη Χώρα των Θαυμάτων είναι είτε σοφή είτε τρελή. Αν μία σοφή γάτα βρεθεί σε ένα δωμάτιο με 3 τρελές, τότε τρελαίνεται και αυτή. Αν μία τρελή γάτα βρεθεί σε ένα δωμάτιο με τρεις σοφές, τότε αυτές καταλαβαίνουν ότι είναι τρελή. Μια μέρα 3 γάτες μπήκαν σε ένα άδειο δωμάτιο. Μετά μπήκε η $4^η$ γάτα και λίγο αργότερα βγήκε η $1^η$. Μετά μπήκε η $5^η$ γάτα και λίγο αργότερα βγήκε η $2^η$, και ούτω καθεξής μέχρι την $12^η$. Όταν μπήκε η $12^η$ γάτα συνέβη για πρώτη φορά ότι οι τρεις από τις γάτες (όχι κατ΄ ανάγκη οι τρεις ήδη μέσα στο δωμάτιο) κατάλαβαν ότι η τέταρτη ήταν τρελή. Πόσες ήταν οι σοφές γάτες όταν τέλειωσε η διαδικασία αν ξέρουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο τρελές;

Α) 5 σοφές **Β)** 6 σοφές **Γ)** 7 σοφές
Δ) 8 σοφές **Ε)** κανένα από τα προηγούμενα

Β΄ Δημοτικού

Προαπαιτούμενα: Δεξιά - αριστερά. Τετράγωνο. Κύκλος.

Το Άσπρο Σύννεφο, η μικρή ινδιάνα, θέλει να πάει στην πηγή. Προχωράει με τέτοιο τρόπο ώστε, όταν περνάει ανάμεσα σε δυο γειτονικές σκηνές, αυτή που βρίσκεται αριστερά της πρέπει να έχει τετράγωνο πάνω της, ενώ η σκηνή στα δεξιά της πρέπει να έχει κύκλο. Ποια διαδρομή θα ακολουθήσει;

Γ΄ Δημοτικού

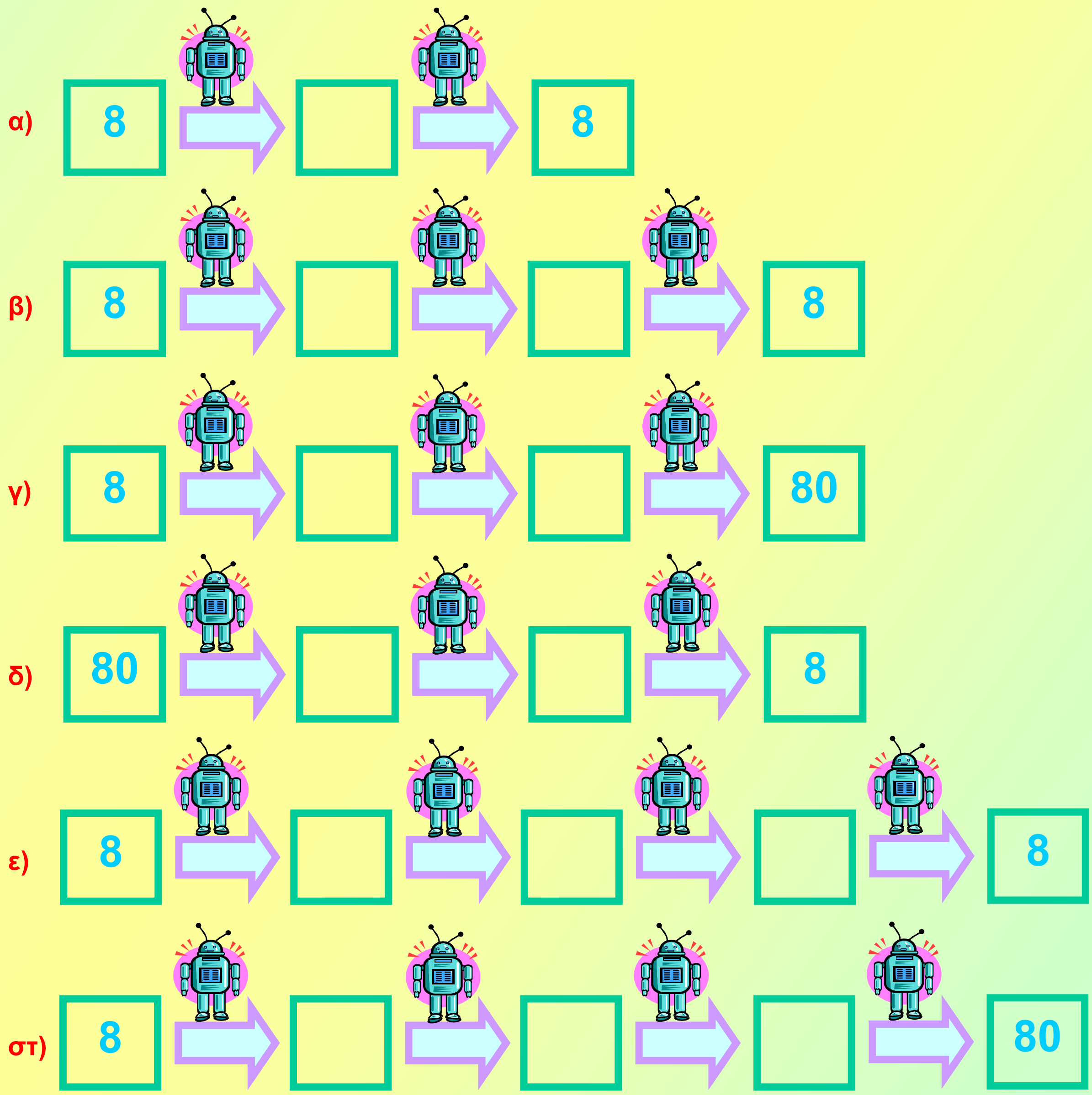
Προαπαιτούμενα: Πολλαπλασιασμός -- διαίρεση με το 10, 100.

Το ρομπότ που βρίσκεται πάνω σε κάθε βέλος, από τα παρακάτω, παίρνει τον αριθμό που βρίσκεται στα αριστερά του και κάνει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

- τον πολλαπλασιάζει επί 10, ή
- τον διαιρεί διά 10, ή
- τον πολλαπλασιάζει επί 100, ή
- τον διαιρεί διά 100.

Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα, να σημειώσετε μέσα σε κάθε βέλος ποια πράξη πρέπει να γίνει και μέσα στα κενά τετραγωνίδια τους αριθμούς που προκύπτουν, ώστε τελικά όλα να είναι σωστά.

Προσοχή: Οι απαντήσεις δεν είναι μοναδικές.

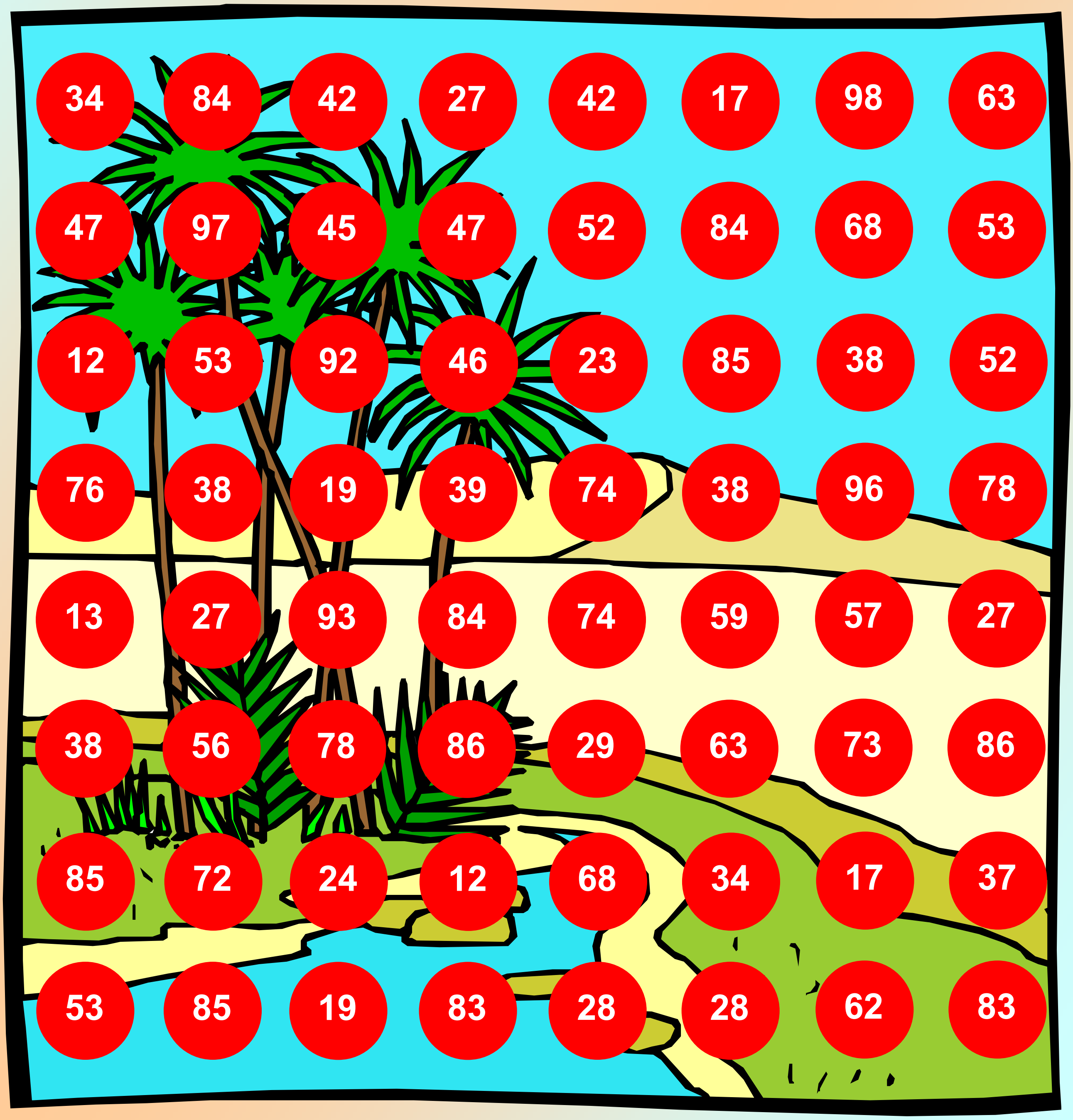


Δ΄ Δημοτικού

Προαπαιτούμενα: Σύγκριση αριθμών. Πολλαπλάσια. Διαίρεση.

Να βρείτε τους αριθμούς που ικανοποιούν ταυτόχρονα όλα τα παρακάτω:

- από πάνω τους βρίσκεται αριθμός μεγαλύτερός τους,
- από κάτω βρίσκεται αριθμός μικρότερός τους,
- αριστερά τους βρίσκεται αριθμός που είναι πολλαπλάσιό του.
- δεξιά τους βρίσκεται αριθμός που είναι το μισό τους.

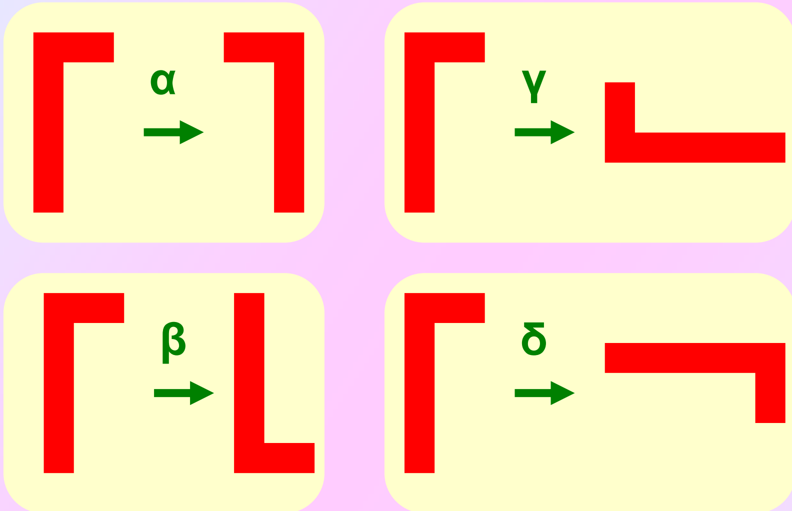


34	84	42	27	42	17	98	63
47	97	45	47	52	84	68	53
12	53	92	46	23	85	38	52
76	38	19	39	74	38	96	78
13	27	93	84	74	59	57	27
38	56	78	86	29	63	73	86
85	72	24	12	68	34	17	37
53	85	19	83	28	28	62	83

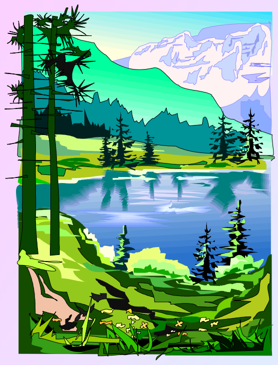
ΣΤ΄ Δημοτικού

Προαπαιτούμενα: Συμμετρία.

Ο συγγραφέας ενός περίεργου βιβλίου θέλει να επεξεργαστεί τις φωτογραφίες που χρησιμοποιεί. Για να συνεννοείται με τον γραφίστα που ετοιμάζει το βιβλίο έχουν συμφωνήσει σε κάποιους συμβολισμούς. Κάθε μετασχηματισμός από τους α, β, γ, δ μετατρέπει ένα σχήμα σε ένα άλλο, όπως φαίνεται στα διπλανά παραδείγματα.



Στην διπλανή εικόνα με ένα τοπίο, εφαρμόζουν διαδοχικά τις μετατροπές

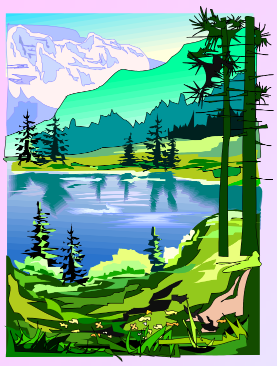


β ⟶ δ ⟶ α ⟶ α ⟶ γ ⟶ δ

Η εικόνα που θα πάρουν τελικά είναι

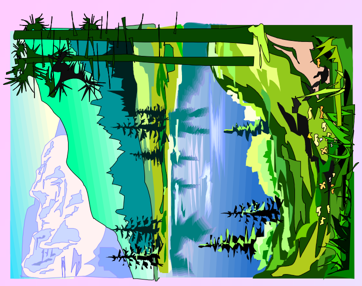
Α

Β

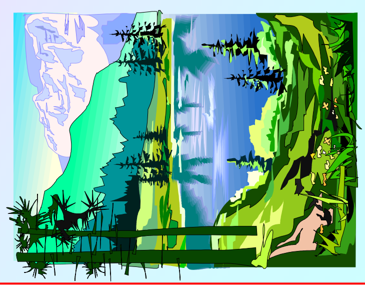


Γ

Δ



Ε



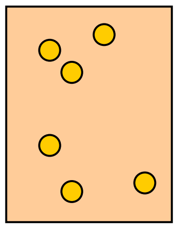
Γυμνάσιο, Λύκειο

Νικηφόρες στρατηγικές σε παιχνίδια σκέψης

Παιχνίδια σκέψης όπως το σκάκι, η ντάμα, η τρίλιζα και άλλα παρόμοια υπάρχουν πολλά. Τα περισσότερα είναι αρκετά σύνθετα, με κορυφαίο το σκάκι, που για να κερδίζει κανείς τους αντιπάλους του, απαιτείται βαθειά μελέτη και δεξιοτεχνία. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με μία λίγο πιο απλή κατηγορία παιχνιδιών σκέψης. Συγκεκριμένα, θα αναφερθούμε σε μία οικογένεια μαθηματικών παιχνιδιών για δύο άτομα, στα οποία ο ένας από τους δύο παίκτες έχει πάντα μια «νικηφόρα στρατηγική». Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα «μυστικό» το οποίο αν το εφαρμόσει ο ένας παίκτης (εσείς δηλαδή) θα εξασφαλίσει νίκη, όσο επιδέξια και αν αμυνθεί αντίπαλος. Εννοείται ότι αυτό δεν είναι εφικτό για όλα τα παιχνίδια σκέψης. Το σκάκι και η ντάμα, λόγου χάρη, είναι αρκετά περίπλοκα παιχνίδια ώστε δεν έχει βρεθεί, και μπορεί ποτέ να μην βρεθεί, μια διαδικασία η οποία να εξασφαλίζει νίκη έναντι οποιουδήποτε παιξίματος του αντιπάλου.

Στα παραδείγματα που θα συζητήσουμε εδώ υπάρχει εξαιρετικό ενδιαφέρον να ανακαλύψει μόνος του ο αναγνώστης την νικηφόρα στρατηγική.

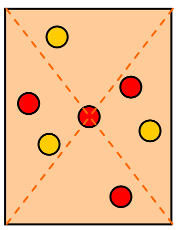
Για να γίνει πιο σαφές το τι εννοούμε με «νικηφόρα στρατηγική» ας δούμε ένα παράδειγμα.



1ο παιχνίδι. Δύο παίκτες έχουν στη διάθεσή τους όσα πούλια τους είναι απαραίτητα. Λόγου χάρη, θα μπορούσε τα πούλια να είναι κέρματα των 10 λεπτών ή οτιδήποτε άλλα όμοια μεταξύ τους αντικείμενα (όπως φασόλια). Τοποθετούν εναλλάξ από ένα πούλι πάνω σε ένα φύλλο χαρτιού, όπως π.χ. ένα φύλλο τετραδίου. Το κάθε πούλι που βάζουν δεν επιτρέπεται να ακουμπάει σε κανένα από τα ήδη τοποθετημένα. Το παιχνίδι λήγει όταν ο ένας από τους δύο παίκτες δεν έχει χώρο να βάλει πούλι στο χαρτί. Σε αυτή την περίπτωση, ο παίκτης που αδυνατεί να κάνει κίνηση, χάνει την παρτίδα.

Εάν εσείς παίζατε πρώτος, τι στρατηγική θα ακολουθούσατε ώστε να εξασφαλίσετε νίκη; Δηλαδή, τι πλάνο θα εφαρμόζατε ώστε ο άλλος παίκτης, αργά ή γρήγορα, να μην έχει χώρο να παίξει;

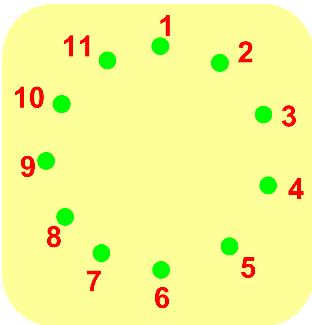
Καλό θα είναι να σκεφτεί μόνος του ο αναγνώστης στην διαδικασία που θα ακολουθήσει, πριν διαβάσει την λύση!



Νικηφόρα στρατηγική. Ο πρώτος παίκτης, εσείς, τοποθετείτε ένα πούλι ακριβώς στο κέντρο συμμετρίας του χαρτιού (στο σχήμα, τα πούλια του πρώτου παίκτη είναι χρωματισμένα κόκκινα). Κατόπιν, κάθε φορά που ο αντίπαλος βάζει ένα πούλι στο χαρτί (κίτρινα στο σχήμα), εσείς απαντάτε θέτοντας ένα πούλι στη συμμετρική θέση ως προς το παραπάνω κέντρο συμμετρίας. Είναι σαφές τώρα ότι όσο υπάρχει χώρος για να βάλει ο αντίπαλος ένα πούλι, άλλο τόσο θα υπάρχει και για σας (κατ' ανάγκη ελεύθερος) χώρος συμμετρικά της κενής θέσης. Με άλλα λόγια, ο παίκτης που δεν θα έχει χώρο να τοποθετήσει πούλι, είναι ο αντίπαλος, οπότε εσείς θα κερδίσετε. Ας σημειωθεί ότι η στρατηγική που περιγράφτηκε λειτουργεί για οποιοδήποτε σχήμα που έχει κέντρο συμμετρίας, όχι μόνο φύλλο χαρτιού σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Για παράδειγμα θα μπορούσε να έχει σχήμα κύκλου, κανονικού εξαγώνου και λοιπά.

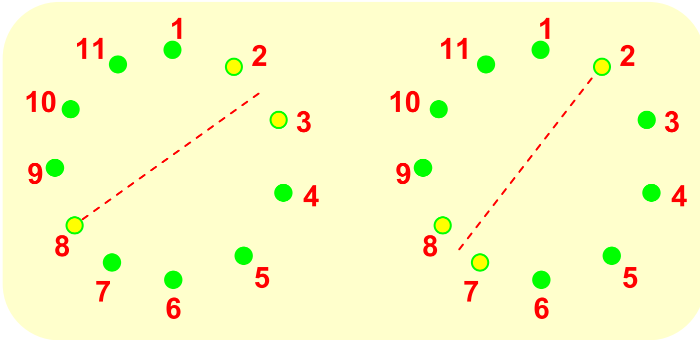
Τώρα που είδαμε το παραπάνω παιχνίδι ας δούμε ένα δεύτερο. Μια διαφορά από το προηγούμενο είναι ότι, στο νέο παιχνίδι, ο άλλος παίκτης είναι αυτός ο οποίος έχει την πρώτη κίνηση. Προσκαλείσθε να βρείτε νικηφόρα στρατηγική. Το προηγούμενο παράδειγμα μπορεί να σας οδηγήσει στην κεντρική ιδέα, αλλά τώρα η στρατηγική είναι λίγο πιο δύσκολη.

2ο παιχνίδι. Τοποθετούμε έναν αριθμό κερμάτων στο τραπέζι, σε στρογγυλή διάταξη. Στο διπλανό σχήμα θέσαμε έντεκα, αλλά θα μπορούσαμε εξ ίσου καλά να τοποθετήσουμε 10, 20 ή οσοδήποτε άλλα. Οι παίκτες εναλλάξ αφαιρούν από το σχήμα ένα ή δύο κέρματα. Το αν θα αφαιρέσουν ένα ή δύο, κάθε φορά που έρχεται η σειρά τους να παίξουν, είναι απολύτως δική τους επιλογή. Ο μόνος περιορισμός είναι ότι όποτε αφαιρέσουν δύο κέρματα, τότε αυτά πρέπει να είναι σε γειτονικές θέσεις, χωρίς να παρεμβάλλονται άλλα κέρματα ή κενά μεταξύ των δύο. Ο παίκτης που θα πάρει το τελευταίο ή τα δύο τελευταία δύο κέρματα, κερδίζει.



Αν εσείς παίζετε δεύτερος, τι στρατηγική θα ακολουθούσατε ώστε αργά ή γρήγορα να μην μείνει κέρμα για τον αντίπαλο;

Νικηφόρα στρατηγική. Η διαδικασία που ακολουθούμε βασίζεται σε δύο ιδέες. Πρώτον, μετά την αρχική κίνηση του αντιπάλου, ο οποίος βέβαια θα αφαιρέσει 1 ή 2 κέρματα, παρατηρούμε ότι τα υπόλοιπα κέρματα είναι σε μια συνεχόμενη γραμμή με ένα κενό μεταξύ των δύο άκρων. Εμείς θα αφαιρέσουμε 1 ή 2 κέρματα από το μέσον της συνεχόμενης γραμμής με τέτοιο τρόπο ώστε αυτά που θα μείνουν να είναι χωρισμένα σε δύο ίσες ομάδες. Κατά κάποιο τρόπο, λοιπόν, υπάρχει μια διαχωριστική ευθεία η οποία καθιστά τις δύο ίσες ομάδες συμμετρικές ως προς άξονα την εν λόγω ευθεία. Ερχόμαστε τώρα στο δεύτερο σκέλος της στρατηγικής: Κάθε φορά που ο αντίπαλος αφαιρεί 1 ή 2 (συνεχόμενα) κέρματα από την μία ομάδα, εμείς αφαιρούμε τα ακριβώς αντίστοιχα της άλλης ομάδας. Με άλλα λόγια, αφαιρούμε τα κέρματα που είναι συμμετρικά ως προς τον παραπάνω διαχωριστική ευθεία.
Το ακόλουθο παράδειγμα αποσαφηνίζει την στρατηγική: Αν στο παραπάνω σχήμα ο πρώτος παίκτης (ο αντίπαλος) αφαιρέσει ένα κέρμα, ας πούμε το 8, εμείς απαντάμε αφαιρώντας τα 2 και 3 ώστε να μείνουν δύο ίσες και συμμετρικές ομάδες κερμάτων, οι 9, 10, 11, 1, και 7, 6, 5, 4. Το σχήμα αριστερά δείχνει αυτή την περίπτωση. Ανάλογα, αν ο άλλος παίκτης αφαιρέσει δύο κέρματα, ας πούμε τα 8 και 9, εμείς απαντάμε αφαιρώντας το 3. Θα μείνουν οι συμμετρικές μεταξύ τους ομάδες 10, 11, 1, 2 και 7, 6, 5, 4, αντίστοιχα, όπως δείχνει το δεξί σχήμα. Από κει και πέρα



εργαζόμαστε συμμετρικά. Για παράδειγμα, αν στο αριστερό σχήμα ο αντίπαλος αφαιρέσει το 9, απαντάμε με το 7. Αν αφαιρέσει τα (συνεχόμενα) 11 και 1, απαντάμε με τα 5 και 4, και ούτω καθεξής. Πάντα θα έχουμε κάτι να αφαιρέσουμε (το συμμετρικό) μετά από κάθε κίνηση του αντιπάλου, οπότε έχουμε νικηφόρα στρατηγική για τον δεύτερο παίκτη.

3^{o} παιχνίδι. Σε μία μακρόστενη λουρίδα με 20 τετραγωνάκια, ή γενικότερα οποιοδήποτε άρτιο πλήθος από τετραγωνάκια, τοποθετούνται ισάριθμοι φυσικοί αριθμοί. Ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στην εικόνα παρακάτω.

4	7	3	9	2	8	7	5	6	2	9	3	8	4	3	7	9	6	7	5

Δύο παίκτες εναλλάξ επιλέγουν έναν από τους δύο αριθμούς στην άκρη της λουρίδας, τον σημειώνουν στο χαρτί τους και μετά τον σβήνουν από την λουρίδα. Έτσι, μετά από κάθε τέτοια κίνηση, λιγοστεύει κατά ένα το πλήθος των αριθμών στην λουρίδα. Συνεχίζουν με αυτό τον τρόπο, δηλαδή επιλέγοντας έναν από τους δύο αριθμούς στα εκάστοτε δύο άκρα και διαγράφοντάς τον από την λουρίδα, μέχρι που να τελειώσουν οι αριθμοί. Μετά ο καθένας προσθέτει τους αριθμούς που επέλεξε. Νικητής είναι ο παίκτης που το άθροισμα των αριθμών του είναι μεγαλύτερο. Αν ήσασταν ο πρώτος παίκτης, πώς θα εξασφαλίζατε να κερδίσετε ή, έστω, να μην χάσετε;

Νικηφόρα στρατηγική. Προσθέτουμε όλους τους αριθμούς στις άρτιες θέσεις και, αντίστοιχα, στις περιττές. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι

$4 + 3 + 2 + 7 + 6 + 9 + 8 + 3 + 9 + 7 = 58$ και,

$7 + 9 + 8 + 5 + 2 + 3 + 4 + 7 + 6 + 5 = 56$, αντίστοιχα.

Ο στόχος του πρώτου παίκτη είναι να κάνει τις κινήσεις του με τέτοιο τρόπο (θα δούμε πώς) ώστε να αναγκάσει τον αντίπαλό να πάρει, θέλοντας και μη, τους αριθμούς με το μικρότερο άθροισμα και μόνον αυτούς. Συνεπώς στον πρώτο παίκτη θα μείνουν οι αριθμοί με το μεγαλύτερο άθροισμα, οπότε κερδίζει. Το ερώτημα, λοιπόν, είναι πώς θα αναγκάσει ο πρώτος παίκτης τον αντίπαλό του να «επιλέξει» τους αριθμούς που έχει αποφασίσει να του δώσει; Εκ πρώτης όψεως δε φαίνεται να μπορεί να το κάνει, γιατί ο κάθε παίκτης φαίνεται να έχει ελεύθερη επιλογή από δύο αριθμούς, έναν αριστερά και έναν δεξιά. Με άλλα λόγια, το παιχνίδι φαίνεται ως τίμιο, χωρίς να έχει το πάνω χέρι ο ένας παίκτης. Και όμως δεν είναι έτσι τα πράγματα! Ένας έξυπνος τρόπος να δούμε πώς ο πρώτος παίκτης εξαναγκάζει τον αντίπαλο να επιλέξει τους αριθμούς που χάνουν, είναι ο εξής: Βάφουμε τα τετραγωνάκια εναλλάξ γαλάζια και κίτρινα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, οι αριθμοί στα γαλάζια τετραγωνάκια έχουν άθροισμα μεγαλύτερο από αυτούς στα κίτρινα. Θα δούμε ότι ο πρώτος παίκτης μπορεί να εξαναγκάσει τον δεύτερο να επιλέξει μόνο τους αριθμούς στα κίτρινα

4	7	3	9	2	8	7	5	6	2	9	3	8	4	3	7	9	6	7	5

τετραγωνάκια. Πραγματικά, πρώτα επιλέγει τον γαλάζιο αριθμό στο ένα άκρο. Τώρα (εδώ είναι το κλειδί) και δύο αριθμοί στις άκρες είναι κίτρινοι. Δεν έχει ιδιαίτερη σημασία ποιον από τους δύο θα επιλέξει ο δεύτερος παίκτης. Αυτό που έχει σημασία είναι ότι θα επιλέξει κίτρινο αριθμό και, συγχρόνως, στο επόμενο βήμα οι δύο ακριανοί είναι ένας γαλάζιος και ένας κίτρινος. Ο πρώτος παίκτης θα επιλέξει τον γαλάζιο, είτε βρίσκεται στα αριστερά ή στα δεξιά, οπότε θα αφήσει πάλι δύο κίτρινους για τον αντίπαλο! Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι τέλους, οπότε ο μεν ένας θα πάρει όλους τους γαλάζιους αριθμούς και θα εξαναγκάσει τον άλλον να «επιλέξει» τους κίτρινους. Κερδίζει ο πρώτος παίκτης ή, έστω, δεν χάνει. Στην σπάνια περίπτωση που τα δύο αθροίσματα είναι ίσα, το παιχνίδι θα βγει ισοπαλία, αλλά υπάρχει ο επόμενος γύρος...

Στο επόμενο παιχνίδι, υπάρχει νικηφόρα στρατηγική για τον δεύτερο παίκτη.

$4^{ο}$ παιχνίδι. Σχεδιάζουμε στο χαρτί ένα 4×4 τετράγωνο. Δύο παίκτες τοποθετούν εναλλάξ στα τετράγωνα τους αριθμούς 1 έως 16, από μία φορά τον καθένα, μέχρι να γεμίσουν όλα τα τετράγωνα. Κατόπιν ο πρώτος παίκτης προσθέτει τους αριθμούς σε κάθε στήλη και μετά βρίσκει την διαφορά μεταξύ του μεγαλύτερου και του μικρότερου από αυτά τα τέσσερα αθροίσματα. Ο αριθμός που θα προκύψει είναι το σκορ του. Ο δεύτερος παίκτης κάνει το ίδιο, αλλά με τις γραμμές. Ο παίκτης που θα έχει το μεγαλύτερο σκορ είναι ο νικητής. Για παράδειγμα αν η 4×4 διάταξη γεμίσει όπως το σχήμα, τότε ο πρώτος παίκτης έχει αθροίσματα στηλών τα 31, 27, 37, 41 (κόκκινοι αριθμοί στη βάση του τετραγώνου), οπότε το σκορ του είναι 41 – 27 = 14. Ο δεύτερος παίκτης έχει αθροίσματα γραμμών 20, 38, 26, 62, οπότε το σκορ του είναι 62- 20 = 42. Αφού το 42 είναι μεγαλύτερο από το 14, κερδίζει ο δεύτερος παίκτης.

6	1	8	5	20
11	3	15	9	38
2	7	4	13	26
12	16	10	14	62
31	27	37	41	

Αν παίζατε ως δεύτερος παίκτης, τι στρατηγική θα ακολουθούσατε ώστε να εξασφαλίσετε νίκη ή, έστω, να βεβαιωθείτε ότι δεν θα χάσετε;

Νικηφόρα στρατηγική. Το μυστικό είναι ο αριθμός 17 και το γεγονός ότι 1 + 16 = 2 + 15 = 3 + 14 = …….= 8 +9 = 17. Κάθε φορά που ο αντίπαλος τοποθετεί έναν αριθμό στα τετραγωνάκια, η απάντηση σας είναι να τοποθετήσετε στην ίδια στήλη εκείνον τον αριθμό που τον συμπληρώνει για να έχουν οι δύο τους άθροισμα 17. Για παράδειγμα, αν τοποθέτησε τον 1, τότε η απάντησή σας είναι ο 17-1=16 στην ίδια στήλη. Προφανώς αυτό είναι πάντα εφικτό γιατί το 16 είναι σίγουρα ελεύθερο, και να γιατί: Αν δεν ήταν ελεύθερο, δηλαδή αν είχε χρησιμοποιηθεί από τον αντίπαλο σε προηγούμενο στάδιο, τότε η απάντησή σας σε εκείνο το στάδιο θα ήταν 17-16-1. Αλλά το 1 είναι ελεύθερο (αφού το χρησιμοποίησε ο αντίπαλος στο τρέχον στάδιο) οπότε και το 16 είναι ελεύθερο. Είναι τώρα προφανές στο τέλος τα αθροίσματα των στηλών είναι 17+17= 34, οπότε ο αντίπαλος έχει σκορ 34-34=0. Το δικό σας σκορ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός αλλά, με λίγη φροντίδα, μπορείτε να μεριμνήσετε ώστε να είναι γνήσια θετικό. Κερδίσατε ή, έστω, δεν χάσατε!

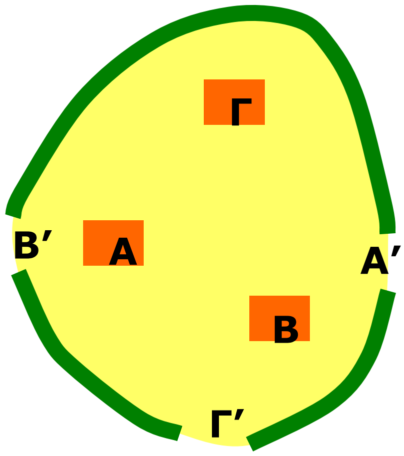
Γυμνάσιο, Λύκειο

Διαδρομές αποφυγής

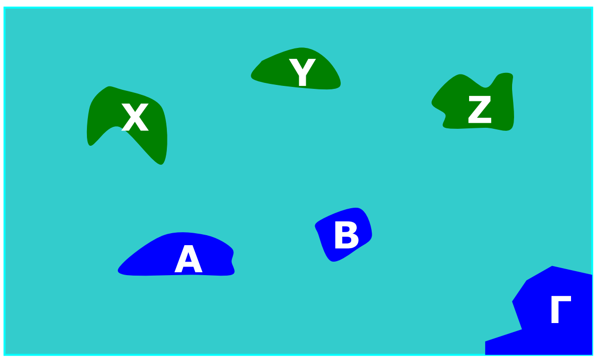
Θα ασχοληθούμε με μία οικογένεια γρίφων όπου χρειάζεται να σχεδιάσουμε έναν αριθμό από διαδρομές οι οποίες πρέπει να μην διασταυρώνονται ή που πρέπει να αποφεύγουν εμπόδια. Τρόπος του λέγειν, είναι σαν να θέλει κάποιος να «αλλάξει δρόμο» για να αποφύγει μία ανεπιθύμητη συνάντηση. Για παράδειγμα, ένας στρατηγός μπορεί να θέλει να στείλει έναν αγγελιοφόρο μέσω μίας διαδρομής με κριτήριο την αποφυγή των μονοπατιών όπου περιπολεί ο εχθρός.

Οι γρίφοι που παραθέτουμε γίνονται σταδιακά πιο δύσκολοι. Αρχίζουμε με έναν που τον επινόησε σε ηλικία 9 ετών ο μετέπειτα σπουδαίος κατασκευαστής γρίφων Sam Loyd (1841 - 1911).

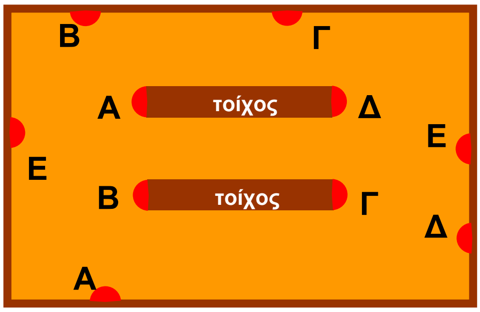
Πρόβλημα 1. Τρία αδέλφια είχαν τα σπίτια τους Α, Β, Γ σε ένα κοινό οικόπεδο, με τρεις πύλες Α', Β', Γ', ως εισόδους. Ο πρώτος αδελφός ήθελε να κτίσει ένα μονοπάτι που ξεκινούσε από το σπίτι του Α στα αριστερά του οικοπέδου και να καταλήγει στην δεξιά πύλη Α'. Ο δεύτερος ήθελε ένα μονοπάτι από το σπίτι του Β στα δεξιά, μέχρι την αριστερή πύλη Β'. Ο τρίτος αδελφός που έμενε στο μεσαίο σπίτι, ήθελε το μονοπάτι από το σπίτι του Γ να καταλήγει στη μεσαία πύλη Γ' στα νότια του οικοπέδου. Τα πράγματα μπερδεύτηκαν παραπάνω όταν αποφάσισαν ότι ήθελαν να μη διασταυρώνονται τα τρία μονοπάτια. Μπορείτε να βοηθήσετε τα τρία αδέλφια να σχεδιάσουν τις διαδρομές; Ο χάρτης παρακάτω δείχνει το οικόπεδο με τα σπίτια και τις πύλες. (Η λύση είναι στο τέλος του βιβλίου).



Πρόβλημα 2. Ένας ναύαρχος έχει στην κυριαρχία του τις περιοχές Α, Β και Γ. Από τη βάση Α θέλει να στείλει από έναν βατραχάνθρωπο με προορισμό καθένα από τα νησιά Χ, Υ και Ζ. Επίσης θέλει να στείλει από την βάση Β από έναν βατραχάνθρωπο με προορισμό τα ίδια νησιά Χ, Υ και Ζ. Τέλος, θέλει να στείλει από την βάση Γ έναν βατραχάνθρωπο για το Χ και έναν για το Υ. Οκτώ συνολικά βατραχάνθρωποι! Μπορείτε να βοηθήσετε τον ναύαρχο να σχεδιάσει τις αποστολές του; Προσοχή όμως, οι διαδρομές των οκτώ βατραχανθρώπων δεν πρέπει να διασταυρώνονται.



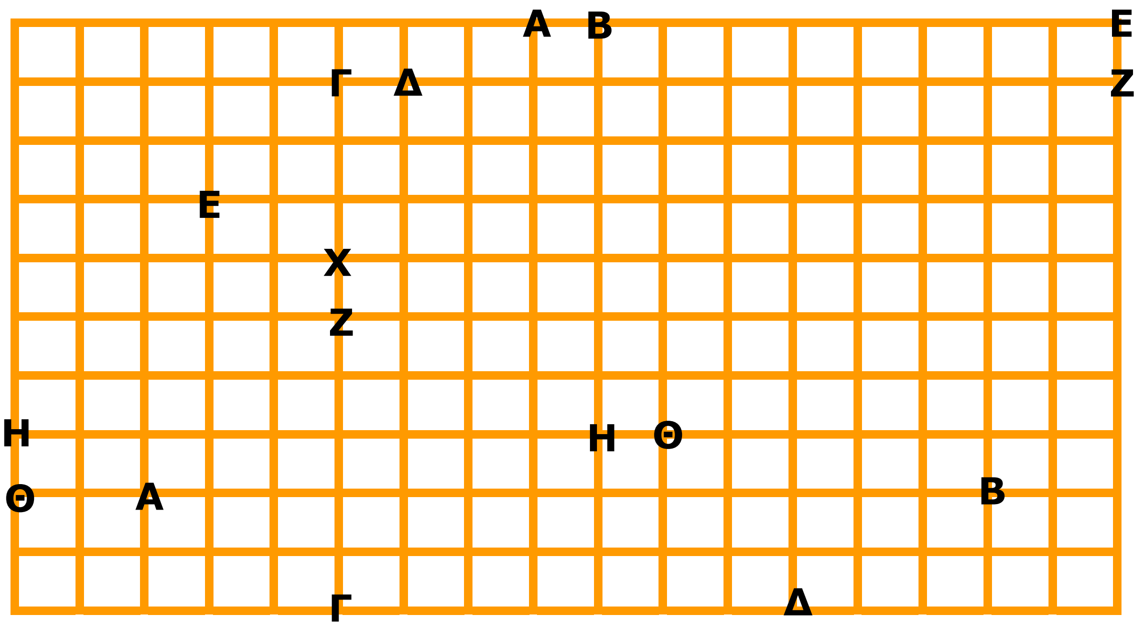
Πρόβλημα 3. Ένας υδραυλικός θέλει να ενώσει με σωλήνες όλα τα ζεύγη σημείων του σχεδιαγράμματος που είναι σημειωμένα με το ίδιο γράμμα, γιατί το ένα από τα γράμματα είναι η παροχή του νερού και το άλλο η βρύση. Για παράδειγμα θέλει να ενώσει τα δύο Α, τα δύο Β και λοιπά μέχρι τα δύο Ε. Οι σωλήνες του δεν πρέπει να διασταυρώνονται. Έχει όμως και μία ακόμα δυσκολία να αντιμετωπίσει: Στο σχεδιάγραμμα υπάρχουν δύο τοίχοι που πρέπει να τους παρακάμψει, πηγαίνοντας από γύρω τους. Πώς θα στρώσει τους σωλήνες του νερού;



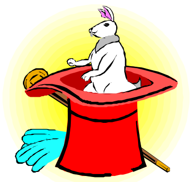
Πρόβλημα 4. Ένας ηλεκτρολόγος θέλει να συνδέσει με καλώδιο όλα τα ζεύγη σημείων του ηλεκτρικού πίνακα που έχουν το ίδιο γράμμα. Τα καλώδια πηγαίνουν από τετραγωνάκι σε διπλανό τετραγωνάκι (οριζόντια ή κάθετα) και δεν πρέπει να διασταυρώνονται. Ο ηλεκτρολόγος έχει μία ακόμα δυσκολία να αντιμετωπίσει: Πρέπει να περάσει καλώδιο από όλα τα τετραγωνάκια του πίνακα, δηλαδή να μην μείνει κανένα τετραγωνάκι άδειο. Πώς θα το κάνει;

				Α	Β		
	Γ					Γ	
				Δ			
Ε							Ε
					Β		
	Α						
							Δ

Πρόβλημα 5. Η εικόνα δείχνει έναν χάρτη που κρατάει στα χέρια του ένας στρατηγός ο οποίος θέλει να στείλει οκτώ ανιχνευτές για να ελέγξουν την περιοχή. Ο κάθε ανιχνευτής πρέπει θα κάνει διαδρομή που ενώνει δύο όμοια γράμματα, όπως το Α με το Α και λοιπά. Οι διαδρομές πρέπει να είναι καταμήκος των οριζόντιων και κάθετων δρόμων και δεν πρέπει να διασταυρώνονται. Μία ακόμα δυσκολία που έχει να αντιμετωπίσει ο στρατηγός είναι ότι οι ανιχνευτές του πρέπει να επισκεφτούν κάθε κόμβο εκτός από αυτόν που είναι σημειωμένος με Χ, ο οποίος είναι απαγο-ρευμένη ζώνη. Πώς θα τα καταφέρει;



μαθημαΓικά



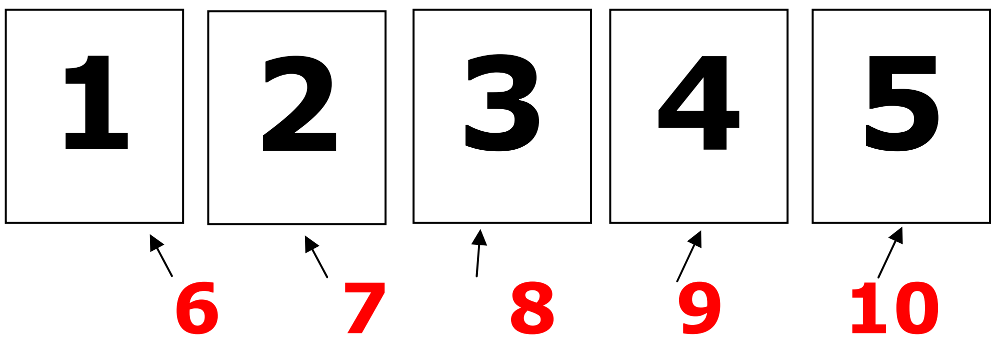
Η ταχυδακτυλουργία ήταν και είναι πάντα ελκυστική. Έφτασε σε υψηλά επίπεδα τον $20^{ο}$ αιώνα, με υπέροχα τεχνάσματα επί σκηνής, αλλά ήταν μία τέχνη που την καλλιεργούσαν οι άνθρωποι από την εποχή της αρχαιότητας. Στην αρχαία Ελλάδα ονομαζόταν ψηφοπαιξία, που σημαίνει παιχνίδι με ψηφίδες (πετραδάκια). Το όνομά της ετυμολογείται από την πιο συνηθισμένη μορφή του παιχνιδιού, που ήταν η εξαφάνιση ψηφίδων και επανεμφάνιση τους αλλού, ως δια μαγείας. Υπάρχει περιγραφή του παιχνιδιού, αλλά χωρίς αποκάλυψη των κρυφών κινήσεων, στους *Δειπνοσοφιστές* του Αθήναιου, ο οποίος αναφέρει και ονόματα γνωστών ψηφοπαικτών της εποχής. Επίσης, στην αρχαιότητα υπήρχαν μηχανικές κατασκευές που λειτουργούσαν ως αυτόματα, των οποίων ο σκοπός ήταν να προκαλέσουν θαυμασμό λόγω των μαγικών τους κινήσεων που, εκ πρώτης όψεως, παράβαιναν τους νόμους της φύσης. Ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς περιγράφει με λεπτομέρεια μερικές εκπληκτικές τέτοιες συσκευές στα *Αυτοματοποιητικά* του και στα *Πνευματικά* του. Όλες λειτουργούν με έναν ευφυή μηχανισμό και, εννοείται, καμία δεν αντίκειται στους νόμους της Φύσης. Ίσα-ίσα τους χρησιμοποιούν αριστουργηματικά στην τεχνασματική λειτουργία τους.

Μία από τις οικογένειες μαγικών τρικ είναι τα λεγόμενα «τηλεπαθητικά», όπου ο μάγος μαντεύει σωστά, δήθεν τηλεπαθητικά, κάτι που έχει βάλει στον νου του ο ακροατής. Αρκετά από αυτά βασίζονται σε μαθηματικές αρχές. Θα παρουσιάσουμε εδώ δύο τέτοια τεχνάσματα. Το πρώτο είναι πολύ απλό ώστε να μπορέσουν να το ερμηνεύσουν και τα παιδιά των μικρών τάξεων. Το δεύτερο θέλει λίγο παραπάνω σκέψη για να το ερμηνεύσει κανείς, αλλά και αυτό είναι προσιτό.

Δύο είναι οι κύριοι λόγοι που παραθέτουμε εδώ τα τρικ. Ο πρώτος είναι για να προκαλέσουμε το ενδιαφέρον του μαθητή για τα Μαθηματικά. Ο δεύτερος και κυριότερος είναι για να διασκεδάσει κάνοντας δημιουργική σκέψη όταν θα προσπαθήσει να βρει την αιτίες πίσω από την λειτουργία τους. Τονίζουμε ότι *ο κάθε άνθρωπος πρέπει να είναι πάντα σκεπτόμενο ον*. Να έχει δηλαδή διαρκώς στον νου του ως κανόνα την αναζήτηση των αιτιών και την ερμηνεία των καταστάσεων.

Μαγικό άθροισμα 1.

Προετοιμασία. Έχουμε 5 κάρτες αριθμημένες με τους αριθμούς 1 έως 5. Οι αριθμοί είναι γραμμένοι με μεγάλα ΜΑΥΡΑ ψηφία. Από την πίσω πλευρά είναι γραμμένοι με ΚΟΚΚΙΝΑ ψηφία οι αριθμοί 6 έως 10.



Συγκεκριμένα, ο 6 είναι από την πίσω πλευρά της κάρτας με το 1, το 7 είναι πίσω από το 2 και ούτω καθεξής.

Η παράσταση. Δίνουμε τις κάρτες σε έναν φίλο και αμέσως ΓΥΡΝΑΜΕ ΤΗΝ ΠΛΑΤΗ ΜΑΣ ώστε να μη βλέπουμε τι κάνει. Η πρώτη οδηγία που δίνουμε στον φίλο μας είναι να ρίξει μία-μία τις κάρτες στο πάτωμα. Εννοείται, γενικά, μερικές θα πέσουν από την μαύρη πλευρά και οι υπόλοιπες από την κόκκινη αλλά οι αριθμοί πάνω τους θα είναι ανακατωμένοι. Ζητάμε τώρα από τον φίλο μας πει πόσες ΚΟΚΚΙΝΕΣ κάρτες βλέπει. Κατόπιν του ζητάμε να προσθέσει τους αριθμούς που βλέπει στις πέντε κάρτες. Εμείς, πριν καλά-καλά ξεκινήσει να προσθέτει τους αριθμούς, μπορούμε αμέσως να του πούμε πόσο είναι το άθροισμα που θα βρει. Πραγματικά, θα βρούμε την σωστή απάντηση, παρόλο που δεν είδαμε τους αριθμούς που έπεσαν. Μπορούμε να επαναλάβουμε την διαδικασία για να πειστεί ο φίλος μας ότι κάθε φορά που κάνουμε το κόλπο η απάντηση, γενικά, είναι διαφορετική.

Το μυστικό. Αν ο φίλος μας πει ότι δεν βλέπει καμία κόκκινη κάρτα, τότε το άθροισμα που θα πούμε είναι 15. Αυτή θα είναι βέβαια η σωστή απάντηση γιατί οι μαύρες κάρτες έχουν άθροισμα 1 + 2 + 3 + 4 + 5 =15. Αν υπάρχουν κόκκινες κάρτες, τότε θα προσθέσουμε στο 15 ένα ακόμη 5 για κάθε κόκκινη κάρτα που βλέπει. Για παράδειγμα, αν υπάρχουν 2 κόκκινες, τότε προσθέτουμε $2\times 5=10$, που σημαίνει ότι η απάντησή μας θα είναι $15+10=25$. Ας σημειωθεί ότι δεν έχει σημασία ποιες είναι οι δύο κόκκινες κάρτες, γιατί το άθροισμα θα είναι 25 έτσι και αλλιώς. Αν όλες, δηλαδή και οι πέντε, κάρτες είναι κόκκινες, τότε θα απαντήσουμε $15+25=40$. Με λίγη εξάσκηση μπορούμε πολύ εύκολα να κάνουμε τις απαιτούμενες πράξεις στο μυαλό μας.

Ερμηνεία. Σε κάθε κάρτα η πίσω κόκκινη πλευρά είναι κατά 5 μονάδες μεγαλύτερη από την μπροστινή (διότι 6-1=5, 7-2=5, 8-3 = 5 και λοιπά). Οπότε για κάθε κόκκινο αριθμό προσθέτουμε 5 μονάδες ακόμη στη θέση του μαύρου που θα βλέπαμε.

Μαγικό άθροισμα 2.

Η παράσταση. Ζητάμε από κάποιον να γράψει σε ένα χαρτί τέσσερις τριψήφιους αριθμούς, τον ένα κάτω από τον άλλο. Καλό είναι να βλέπουν όλοι οι άλλοι τι έγραψε. (Εσείς με τη σειρά σας μπορείτε να τους αντιγράψετε στο δικό σας χαρτί για να κάνετε αργότερα κάποιες μυστικές πράξεις που απαιτούνται για να «μαντέψετε» την απάντηση). Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ο φίλος σας έγραψε σε κοινή θέα τους αριθμούς στο διπλανό πινακάκι. Μετά γυρνάτε την πλάτη ώστε να μη βλέπετε τις κινήσεις, αλλά δίνετε οδηγίες.

327
182
701
423

Η ιδέα είναι από εδώ και πέρα να φαίνεται η διαδικασία όσο γίνεται πιο τυχαία που, φαινομενικά τουλάχιστον, να είναι αδύνατον να μαντέψετε τον αριθμό που θα προκύψει στο τέλος. Βέβαια, τίποτα δεν είναι τυχαίο!

Ζητάτε τώρα από τον φίλο σας να επιλέξει ένα (οποιοδήποτε) ψηφίο από τον πρώτο αριθμό, ένα από τον δεύτερο, ένα από τον τρίτο και ένα από τον τέταρτο. Μετά του ζητάτε να τους τοποθετήσει με τη σειρά που τους επέλεξε ώστε να γράψει έναν τετραψήφιο. Τονίστε εδώ ότι η επιλογή των τεσσάρων ψηφίων είναι κατά τα άλλα στη ΑΠΟΛΥΤΑ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΔΙΚΗ ΤΟΥ ΒΟΥΛΗΣΗ. Για παράδειγμα, λέμε τώρα, θα μπορούσε να επιλέξει τους 2, 1, 7 και 3 για να φτιάξει τον 2173. Τους αριθμούς που επέλεγε τους διαγράφει από τον αρχικό πίνακα (οι κόκκινοι στην εικόνα).

327
182
701
423

2173

Ζητάτε από τον φίλο σας να επαναλάβει άλλες δύο φορές την διαδικασία. Δηλαδή, από τους *υπόλοιπους* αριθμούς να επιλέξει ένα ψηφίο από τον πρώτο αριθμό, ένα από τον δεύτερο, ένα από τον τρίτο και ένα από τον τέταρτο και να τους τοποθετήσει με τη σειρά που τους επέλεξε για να κατασκευάσει έναν τετραψήφιο. (Την τελευταία φορά, βέβαια, περίσσεψε από ένας αριθμός σε κάθε γραμμή, οπότε η επιλογή είναι αυτόματη).

Έχουμε τώρα τρεις νέους τετραψήφιους αριθμούς. Στο παραπάνω παράδειγμα ο πρώτος είναι ο 2173, αλλά υπάρχουν και άλλοι δύο. Εσείς δεν έχετε ιδέα ποιοι είναι οι τρεις αριθμοί αφού δεν είχατε την δυνατότητα να παρακολουθήσετε τα βήματα. Το τονίζετε αυτό!

Ζητάτε από τον φίλο σας να προσθέσει τους άγνωστους σε σας τετραψήφιους. Πριν καλά-καλά ξεκινήσει να προσθέτει, μπορείτε, ψελλίζοντας μία αμπρακατάμπρα εδώ, να του πείτε αμέσως πόσο είναι το άθροισμα που θα βρει. Πραγματικά, όταν θα κάνει τις πράξεις, θα διαπιστώσει ότι βρήκατε την σωστή απάντηση. Μπορείτε να επαναλάβετε ***με άλλα νούμερα*** την διαδικασία για να πειστεί ο φίλος μας για το αυτονόητο, ότι δηλαδή το άθροισμα στο τέλος εξαρτάται από τους αρχικούς αριθμούς.

Το μυστικό. Παράλληλα με τις οδηγίες προς τον ακροατή σας, χρειάζεται να κάνετε και εσείς μία προεργασία. Καλό είναι να γίνει κρυφά, όταν οι άλλοι είναι απασχολημένοι με τα βήματα που έχουν να διεκπεραιώσουν. Θυμόσαστε, τους τέσσερις αρχικούς τριψήφιους τους σημειώσατε και εσείς στο χαρτί σας, πριν γυρίσετε την πλάτη και δώσετε οδηγίες. Τους αριθμούς αυτούς τους προσθέτετε με τον εξής περίεργο τρόπο: Τους γράφετε κάθετα αρχίζοντας από τον πρώτο και με τη σειρά οι υπόλοιποι. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι

```
 3 1 7 4
 2 8 0 2 +
 7 2 1 3
-----------
1 3 1 8 9
```

Το άθροισμα που θα βρείτε, περιέργως, είναι το ίδιο με αυτό που θα βρει ο φίλος σας, παρά το ανακάτεμα των ψηφίων. Αυτός θα είναι ο αριθμός που θα μαντέψετε με αμπρακατάμπρα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ο 13189, αλλά αλλάζει από παράδειγμα σε παράδειγμα. Αυτή είναι η μαγεία του.

Ερμηνεία. Το πρώτο ψηφίο καθενός από τους αριθμούς που θα κατασκευάσει ο φίλος σας προέρχεται από τον πρώτο τριψήφιο. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα οι τετραψήφιοι θα είναι, με κάποια σειρά, της μορφής 3ΧΧΧ, 2ΧΧΧ και 7ΧΧΧ , όπου τα Χ είναι ψηφία από τους άλλους αρχικούς αριθμούς. Συμβαίνει ακριβώς το ίδιο με τα δεύτερα, τρίτα και τέταρτα ψηφία. Για παράδειγμα, στο παραπάνω, οι τετραψήφιοι θα είναι της μορφής ΥΥΥ4, ΥΥΥ2, ΥΥΥ3, με κάποια σειρά. Αυτό που έχει σημασία είναι ότι *στην τελική πρόσθεση αθροίζονται ακριβώς τα ίδια ψηφία, μόνο η θέση τους στην στήλη αλλάζει.* Πάντως το άθροισμα μένει αναγκαστικά το ίδιο, αφού η σειρά των προσθετέων δεν έχει σημασία.

Περίεργοι αριθμοί

Αριθμοί με διαφορετικά ψηφία των οποίων το τετράγωνο αποτελείται από ψηφία που δεν περιέχονται στον ίδιο τον αριθμό.
Καθένα από τα δέκα ψηφία εμφανίζεται είτε στον αριθμό είτε στο τετράγωνο του.

$$203879^2 = 41\ 566\ 646\ 641$$

$$639172^2 = 408\ 540\ 845\ 584$$

Ο 639172 είναι ο μεγαλύτερος αριθμός με αυτή την ιδιότητα.

Αριθμοί με διαφορετικά ψηφία των οποίων ο κύβος αποτελείται από ψηφία που δεν περιέχονται στον ίδιο τον αριθμό:

$$6378^3 = 259\ 449\ 922\ 152$$

$$7658^3 = 449\ 103\ 134\ 312$$

Ο μικρότερος πρώτος που προκύπτει με επικόλληση διαδοχικά των ψηφίων 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, ... , 9, 0, 1, ... είναι ο

$$\overbrace{\underbrace{\underbrace{1234567890}\underbrace{1234567890}......\underbrace{1234567890}1}_{17\ \text{δεκάδες ψηφίων}}}^{171\ \text{ψηφία}}$$

Έχει 171 ψηφία. Βρέθηκε από τον Daniel Dockery, ο οποίος διαπίστωσε ότι υπάρχουν μόνο πέντε πρώτοι αυτού του τύπου με λιγότερα από χίλια ψηφία.
Ένας άλλος είναι ο

$$\overbrace{\underbrace{\underbrace{1234567890}\underbrace{1234567890}......\underbrace{1234567890}}_{56\ \text{δεκάδες ψηφίων}}1234567}^{567\ \text{ψηφία}}$$

Αυτός ο αριθμός τελειώνει σε 567, όσο το πλήθος των ψηφίων του.

Αιτιολογημένες λύσεις στα θέματα του διαγωνισμού "Καγκουρό 2012"

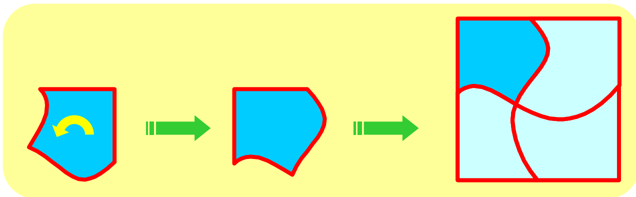
Επίπεδο Β' Δημοτικού

1) Γ) 5

Τα ζώα στην εικόνα είναι πέντε. Η γάτα, ο σκύλος, το άλογο, το μεγάλο καγκουρό και το μικρό καγκουρό στον μάρσιπο του μεγάλου.

2) Β)

Το κομμάτι που μπαίνει στο άδειο μέρος της εικόνας είναι το (Β). Για να τοποθετηθεί σωστά πρέπει να το στρίψουμε αριστερόστροφα, ώστε να μπει η ορθή γωνία στη θέση της.



3) Δ) 14

Η γάτα και ο σκύλος έχουν 8 πόδια και τα τρία πτηνά έχουν άλλα 6. Το σύνολο είναι $8+6=14$ πόδια.

4) Δ) 4

Η λέξη ΚΑΓΚΟΥΡΟ περιέχει δύο Κ. Αν την γράψουμε δύο φορές, το γράμμα Κ θα γραφεί τέσσερις φορές, όπως βλέπουμε και στο ΚΑΓΚΟΥΡΟ ΚΑΓΚΟΥΡΟ.

5) Β)

Η εικόνα έχει το μοτίβο "αρκουδάκι – πιθηκάκι – σκιουράκι – αλογάκι" να επαναλαμβάνεται ξανά και ξανά. Αν συνεχίσουμε άλλες δύο θέσεις, μέχρι την δέκατη, από εκεί που σταματήσαμε, θα διαπιστώσουμε ότι πρέπει να ζωγραφίσουμε το πιθηκάκι.

6) Α) Κυριακή

Η λέξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ έχει 10 γράμματα. Οπότε τα το όγδοο θα γραφεί Παρασκευή (όπως το πρώτο), το ένατο θα γραφεί Σάββατο και το δέκατο, Κυριακή.

7) Δ) 11

Όταν τέλειωσε το σχολείο, το ρολόι έδειχνε 2 το μεσημέρι. Τρεις ώρες νωρίτερα έδειχνε 11 το πρωί.

8) Α) Το Α

Δεν χρειάζεται να μετρήσουμε πόσες φορές υπάρχει το κάθε γράμμα. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το μοτίβο Α Β Γ Δ επαναλαμβάνεται συνεχώς. Οπότε μπορούμε να αγνοήσουμε τις τετράδες που τα περιέχουν. Κοιτάμε μόνο στο τέλος, μετά την τελευταία τετράδα. Θα διαπιστώσουμε ότι υπάρχει το Α. Συμπεραίνουμε ότι το Α είναι μία φορά παραπάνω από τα άλλα γράμματα.

9) Ε) Ε

Οι Α, Β, Γ και Δ αποτελούνται από 13 ίσα μεταξύ τους τμήματα ενώ η Ε από 15. Συνεπώς η Ε είναι η μεγαλύτερη.

10) Β)

Δεξιά της πεταλούδας και αριστερά του λιονταριού, υπάρχουν δύο ζωγραφιές, ένα πουλί (πελεκάνος) και ένα λουλούδι. Το πρόβλημα μας ρωτάει τι *ζώο* είναι δεξιά της πεταλούδας και αριστερά του λιονταριού, οπότε η απάντησή μας είναι το πουλί.

11) Γ)

Το φεγγάρι είναι δεξιά του δέντρου, οπότε οι εικόνες (Α) και (Δ) δεν είναι οι σωστές. Επίσης το φεγγάρι είναι λίγο πιο ψηλά από το δέντρο, οπότε ούτε η εικόνα (Β) είναι σωστή. Από τις εικόνες (Γ) και (Ε), η σωστή είναι αυτή στην οποία το άνοιγμα του φεγγαριού είναι μακρυά από το δέντρο, δηλαδή η (Γ).

12) Α) 3

Οι 9 μαθητές και η Δασκάλα είναι 10 άτομα. Τα υπόλοιπα $13-10=3$, είναι οι μαθήτριες.

13) Δ) 12

Σε ένα χρόνο θα έχει αυξηθεί η ηλικία της καθεμίας κατά 1 οπότε συνολικά, και των δύο αδελφών μαζί, κατά 2. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των ηλικιών από 10 θα γίνει 12.

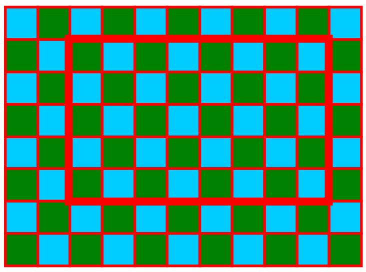
14) Β) 7

Τα βιβλία στο τραπέζι είναι $12+9=21$. Αφού η καθεμία από τις τρεις θα πάρει τον ίδιο αριθμό από βιβλία, σημαίνει ότι θα πάρει 21 δια 3, δηλαδή 7 βιβλία.

15) Δ) 7

Μετά το κάθε κόψιμο ενός κεφαλιού, τα κεφάλια της Λερναίας Ύδρας αυξάνουν κατά 2 (ένα που χάνεται αλλά φυτρώνουν 3 καινούργια). Με δύο κοψίματα θα αυξηθούν κατά $2+2=4$, οπότε τα κεφάλια από 3 θα γίνουν $3+4=7$.

16) Γ) 20



Στην πρώτη σκεπασμένη στήλη, κάτω από το χαλί, υπάρχουν 2 γαλάζια πλακάκια (τα δύο που είναι αμέσως δεξιά των πράσινων στην προηγούμενη στήλη). Στην επόμενη στήλη κάτω από το χαλί είναι 3 γαλάζια, και λοιπά. Μπορούμε να μετρήσουμε ότι τα σκεπασμένα γαλάζια πλακάκια είναι συνολικά 20. Άλλος τρόπος να σκεφτούμε είναι να πούμε ότι σε κάθε γραμμή υπάρχουν 8 σκεπασμένα πλακάκια, όποτε τα μισά, δηλαδή τα 4, είναι γαλάζια. Επειδή έχουμε συνολικά 5 σκεπασμένες γραμμές, τα γαλάζια από κάτω είναι $4 \times 5 = 20$.

17) Α) 2 κιλά

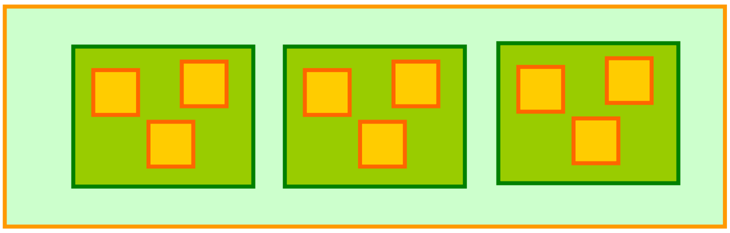
Αφού όλα μαζί τα ζωάκια ζυγίζουν 24 κιλά, και ξέρουμε ότι όλα μαζί τα σκυλάκια ζυγίζουν όσο όλα μαζί τα γατάκια, σημαίνει ότι τα γατάκια ζυγίζουν το μισό του 24, δηλαδή 12 κιλά. Αφού τα γατάκια είναι 6, σημαίνει ότι το καθένα ζυγίζει 12 διά 6, ίσον 2 κιλά.

18) Γ) 24

Στην αρχή όλες μαζί οι καραμέλες των τριών παιδιών ήσαν $3 \times 10 = 30$. Αφού τα τρία παιδιά έφαγαν από μία καραμέλα ο καθένας, θα πει ότι συνολικά έφαγαν 3 καραμέλες. Επίσης έδωσαν συνολικά 3 καραμέλες στη Δασκάλα, δηλαδή αυτές που φάγανε και που δώσανε ήταν $3 + 3 = 6$ καραμέλες. Οπότε έμειναν $30 - 6 = 24$ καραμέλες.

19) Δ) 13

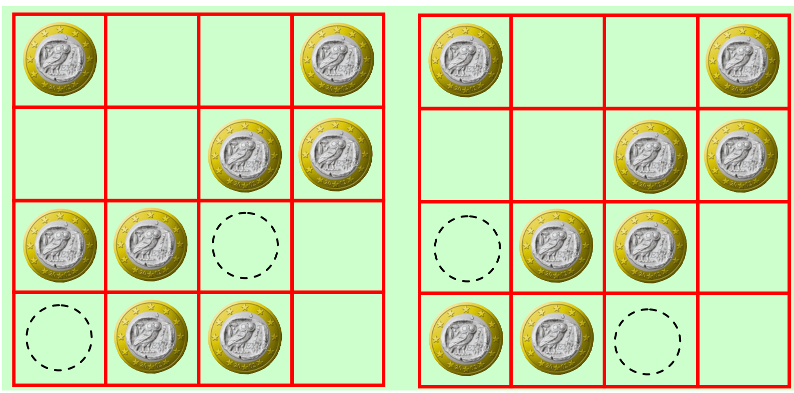
Τα μικρότερα από τα κουτιά είναι συνολικά $3 \times 3 = 9$. Τα αμέσως μεγαλύτερα είναι 3 και το μεγαλύτερο είναι 1. Σύνολο $9 + 3 + 1 = 13$.



20) Δ) 4

Από την 4 = △ + △ βγάζουμε το συμπέρασμα ότι △ = 2. Αν χρησιμοποιήσουμε αυτή την πληροφορία στην 3 = ○ + △ = ○ + 2, συμπεραίνουμε ότι ○ = 1. Επίσης, από την 5 = △ + □=2 + □ , συμπεραίνουμε ότι □ = 3. Οπότε έχουμε ☀ = ○ + □ = 1 + 3 = 4.

21) Γ) 2



Αφού έχουμε 4 γραμμές και στο τέλος κάθε γραμμή πρέπει να περιέχει από 2 κέρματα, σημαίνει ότι πρέπει στο τέλος να μείνουν $2 \times 4 = 8$ κέρματα. Αυτή την στιγμή στο τετράγωνο υπάρχουν 10 κέρματα, οπότε οπωσδήποτε πρέπει να φύγουν $10 - 8 = 2$ κέρματα. Αν θέλουμε να εξετάσουμε κατά πόσο υπάρχει τρόπος να αφαιρέσουμε δύο κέρματα και στο τέλος να μείνουν από δύο σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη, οι εικόνες δείχνουν δύο τέτοιους τρόπους.

Επίπεδο 1 – (Γ' και Δ' Δημοτικού)

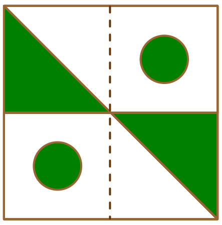
1) Α) 7

Τα γράμματα της λέξης ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, χωρίς να μετράμε αυτά που επαναλαμβάνονται, είναι τα Μ, Α, Θ, Η, Τ, Ι, Κ. Οπότε χρειαζόμαστε 7 χρώματα για τα 7 αυτά ανόμοια γράμματα.

2) Ε) είναι όλες ίσες

Μετρώντας θα δούμε ότι όλες οι γραμμές αποτελούνται από 13 μικρότερα τμήματα, που είναι όλα ίσα μεταξύ τους.

3) Δ)



Στα σχήματα (Α), (Β), (Γ) και (Ε) κάθε άσπρη περιοχή είναι ολόιδια με μία πράσινη στο ίδιο σχήμα. Για παράδειγμα, στο (Α) έχουμε α) ένα πράσινο τρίγωνο που είναι ίδιο με ένα άσπρο τρίγωνο και β) ένα πράσινο τρίγωνο με έναν άσπρο κύκλο μέσα του που είναι ολόιδιο με το ίδιο σχήμα, αλλά με τα χρώματα ανάποδα. Το μόνο σχήμα που διαφέρει είναι το (Δ). Σε αυτό έχουμε από δύο ολόιδια τρίγωνα αλλά κάθε πράσινος κύκλος είναι πιο μικρός από το λευκό τετράγωνο που το περιέχει. Έτσι, η πράσινη περιοχή είναι πιο μικρή από την άσπρη.

4) Α)

Μετά από μισή ώρα, δηλαδή μετά από 30 λεπτά, η ώρα θα είναι 8 και 10. Το ρολόι που δείχνει 8 και 10 είναι το (Α).

5) Β) 10

Συνεχίζοντας να απλώνουμε τις πετσέτες με τρόπο ώστε κάθε μία να χρησιμοποιεί κοινό μανταλάκι με την επόμενή της (όπως δείχνει το αρχικό σχήμα) θα χρειαστούμε 10 μανταλάκια. Ένα είναι το αριστερό σε κάθε μία από τις 9 πετσέτες και ένα ακόμη δεξιά της τελευταίας.

6) Γ)

Το τετραγωνάκι Α2 είναι στη στήλη Α και γραμμή 2 και όμοια τα υπόλοιπα. Αν χρωματίσουμε τα τετράγωνα που μας λέει η ερώτηση, θα προκύψει το σχήμα Γ.

7) Α) 3

Τα 9 παιδιά που πιάστηκαν και το ένα που τα φυλούσε μας κάνουν 10. Μένουν $13-10=3$ ακόμη παιδιά.

8) Ε) Ο Απόλλωνας, με 4 πόντους παραπάνω

Παρατηρώντας το σχήμα βλέπουμε ότι ο Απόλλωνας κέρδισε $25+35+7=67$ πόντους και η

Άρτεμις $15+45+3=63$ πόντους. Άρα κέρδισε ο Απόλλωνας με $67-63=4$ πόντους παραπάνω.

9) Γ) 7

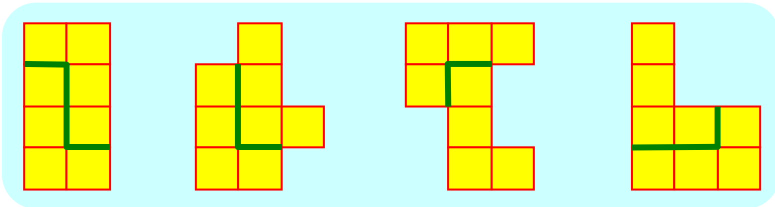
Συνεχίζοντας το σχήμα, βάζοντας πίσω τα πλακάκια που έπεσαν, βλέπουμε ότι τα κόκκινα που πρέπει να προσθέσουμε είναι 7.

10) Δ) στις 26 Φεβρουαρίου

Τα γατάκια γεννήθηκαν στις 26 Φεβρουαρίου. Μπορούμε να κάνουμε τον επαλήθευση ως εξής: Στις 29 Φεβρουαρίου τα γατάκια θα είναι 3 ημερών. Συν άλλες 17 μέχρι τις 17 Μαρτίου, σύνολο $3+17=20$.

11) Ε) όλα

Μπορεί να κατασκευάσει και τα τέσσερα σχήματα, όπως δείχνει η εικόνα.



12) Β) 6

Τα τρία λουλούδια είναι δύο παραπάνω από το ένα, οπότε τα δύο λουλούδια έχουν 12 φύλλα. Αυτό σημαίνει ότι το ένα λουλούδι έχει 6 φύλλα.

13) Ε) 10

Η λέξη κλειδί είναι ότι το πρόβλημα μας ζητάει *πόσα το λιγότερο* από τα κουλουράκια έχουν και σταφίδες και καρύδια. Αν παραμερίσουμε τα 15 κουλουράκια με τις σταφίδες, μένουν άλλα 20-15 = 5. Αν σε *όλα* αυτά η γιαγιά βάλει καρύδια, μένουν άλλα 10 κουλουράκια. Αυτά τα 10 ήδη έχουν σταφίδες. Οπότε οπωσδήποτε υπάρχουν 10 κουλουράκια, το λιγότερο, που έχουν και σταφίδες και καρύδια.

14) Γ) 3

1	2	3	
4	3	2	1
3	4	1	2
2	1		

Όταν κάνει τις πράξεις ο Ευκλείδης, καταλήγει στους κίτρινους αριθμούς στο σχήμα αριστερά. Μετά μπορεί να συμπληρώσει αμέσως τους τρεις αριθμούς στα κόκκινα τετραγωνάκια γιατί, σε κάθε περίπτωση, έχει μόνο μία επιλογή (στη κάθε περίπτωση είναι ο αριθμός που λείπει από την τετράδα 1, 2, 3 και 4, οριζόντια ή κάθετα). Μετά από αυτά, έχει μία επιλογή και για τα τρία τελευταία τετραγωνάκια (γαλάζια και πράσινο στο σχήμα), που σημαίνει ότι στο κάτω δεξιά τετραγωνάκι μπαίνει υποχρεωτικά ο αριθμός 3.

1	2	3	4
4	3	2	1
3	4	1	2
2	1	4	3

15) Γ) 57

Οι 6 μαθητές έχουν $6 \times 5 = 30$ βιβλία στη τσάντα τους. Οι υπόλοιποι είναι $15 - 6 = 9$ μαθητές. Αυτοί έχουν $9 \times 3 = 27$ βιβλία, οπότε το σύνολο των βιβλίων είναι $30 + 27 = 57$.

16) Β) 5

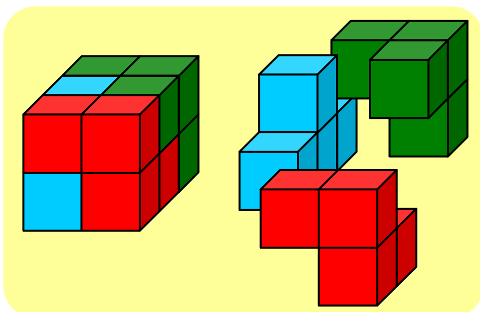
Πρώτα μετράμε πόσα πόδια έχουν οι 3 γάτες, οι 4 κότες και οι δύο πάπιες. Είναι φανερό ότι έχουν $12 + 8 + 4 = 24$ πόδια. Τα υπόλοιπα $44 - 24 = 20$ πόδια ανήκουν στα σκυλάκια. Διαιρώντας το 20 με το 4, θα βρούμε ότι υπάρχουν 5 σκυλάκια στον κήπο.

17) Α) 30

Θα δούμε ότι από την συνθήκη του προβλήματος, ότι δηλαδή τα κορίτσια είναι διπλάσια σε αριθμό από να αγόρια, μόνο το 30 ταιριάζει ως πιθανή απάντηση. Όλες οι άλλες περιπτώσεις αποκλείονται. Πραγματικά, αφού για κάθε αγόρι στο λεωφορείο υπάρχουν δύο κορίτσια, μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τους μαθητές σε τριάδες. Συμπεραίνουμε ότι όλοι μαζί οι μαθητές είναι πολλαπλάσιο του 3. Από τους αριθμούς 30, 20, 23, 25, και 29 που μας δίνει το πρόβλημα, μόνο ο 30 είναι πολλαπλάσιο του 3 (ελέγχουμε). Οπότε οι 20, 23, 25 και 29 αποκλείονται. Από τους αριθμούς που δόθηκαν, μόνο ο 30 ταιριάζει ως αριθμός των μαθητών στο λεωφορείο. Συγκεκριμένα μπήκαν 10 αγόρια και 20 κορίτσια (δηλαδή διπλάσια από τα αγόρια), που συνολικά είναι 10+20 = 30 μαθητές.

18) Δ)

Το σχήμα δείχνει πώς τοποθετούνται τα δύο κομμάτια (κόκκινο και πράσινο) μαζί με το γαλάζιο (Δ) για να φτιάξουν το κουτί.



19) Γ) 4

Από την συνθήκη ότι κάθε αριθμός πρέπει να είναι ίσος με έναν από τους δύο γειτονικούς του συμπεραίνουμε ότι δεξιά του 2 πρέπει να υπάρχει ένα 2 και αριστερά του 1 πρέπει να υπάρχει 1. Αν συμπληρώσουμε τα τετραγωνάκια αυτά, παρατηρούμε τώρα ότι το άθροισμα των αριθμών που φαίνονται είναι 19 (ελέγχουμε). Οπότε οι δύο αριθμοί που λείπουν έχουν άθροισμα 27-19=8. Παίρνοντας υπόψη και την συνθήκη για ίσους αριθμούς που βρίσκονται σε μία από τις διπλανές θέσεις, βλέπουμε ότι οι αριθμοί που λείπουν είναι 4 (και οι δύο).

5	3	3	2	2	4	4	1	1	2

20) Δ) 1173

Για να έχουμε όσο το δυνατό μεγαλύτερο άθροισμα, πρέπει τα ψηφία των εκατοντάδων στους δύο αριθμούς να είναι όσο γίνεται μεγαλύτερα. Αυτό σημαίνει ότι, από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, και 6 που μας δίνονται, είναι οι 5 και 6. Δηλαδή οι αριθμοί που ψάχνουμε έχουν τη μορφή 6** και 5**. Τώρα έχουμε να επιλέξουμε ψηφία δεκάδων από τους 1, 2, 3, 4. Με την ίδια σκέψη, τα ψηφία πρέπει να είναι τα 3 και 4, οπότε οι αριθμοί μας είναι είτε οι 64* και 53* (θα μπορούσε να ήταν οι 63* και 54* αλλά αυτό δεν έχει και ιδιαίτερη σημασία γιατί το άθροισμά τους δεν αλλάζει). Οι αριθμοί 1 και 2 που περίσσεψαν, είναι οι μονάδες και οι αριθμοί μας είναι οι 642 και 531 (ή παραλλαγές όπως 641 και 532, αλλά χωρίς διαφορά για το τελικό άθροισμα). Το άθροισμα, λοιπόν, που ψάχνουμε είναι 642+531= 1173.

21) Β) 4

Η καμήλα πρέπει να έχει και το καγκουρό και το αρκουδάκι δίπλα της. Οπότε η φωτογραφία πρέπει να περιέχει την διάταξη

καγκουρό-καμήλα-αρκουδάκι ή την αρκουδάκι-καμήλα-καγκουρό

Για κάθε μία από αυτές τις επιλογές, ο πιγκουΐνος πρέπει να σταθεί είτε αριστερά όλων είτε δεξιά όλων. Σύνολο έχουμε 4 εκδοχές. Τις α) πιγκουΐνος – καγκουρό – καμήλα – αρκουδάκι, β) καγκουρό – καμήλα - αρκουδάκι - πιγκουΐνος, γ) πιγκουΐνος - αρκουδάκι – καμήλα - καγκουρό και δ) αρκουδάκι – καμήλα – καγκουρό – πιγκουΐνος.

22) Ε)

Αφού η ώρα είναι 12 και 55 λεπτά και 30 δευτερόλεπτα, ο δείκτης των δευτερολέπτων πρέπει να είναι αυτός που δείχνει προς το 6, δηλαδή ο μικρότερος στο περίεργο ρολόι. Ο δείκτης των λεπτών πρέπει να δείχνει στο 11, δηλαδή είναι ο μεγαλύτερος από τους εικονιζόμενους. Ο τρίτος δείκτης είναι ο μεσαίος σε μέγεθος, ο οποίος δείχνει κοντά στο 1 γιατί το 12 η ώρα και 55 λεπτά και 30 δευτερόλεπτα είναι σχεδόν 1 η ώρα. Από τα ρολόγια που εικονίζονται, αυτό που δείχνει 8 και 11 λεπτά είναι το (Ε) καθώς ο δείκτης των ωρών (ο μεσαίος σε μέγεθος) δείχνει λίγο μετά το 8, ο δείκτης των λεπτών (ο μεγάλος) δείχνει λίγο μετά το 2 και ο δευτερολεπτοδείκτης (ο μικρός) δείχνει ακριβώς προς το 12.

23) Δ) 7

Μπορούμε να ελέγξουμε τις πέντε πιθανές απαντήσεις που αναγράφονται στην εκφώνηση για να δούμε ποια δίνει αποτέλεσμα 100 μετά τις πράξεις. Θα διαπιστώσουμε ότι είναι το 7. Όμως θα προτείνουμε μία λύση που δεν χρησιμοποιεί τις συγκεκριμένες απαντήσεις αλλά προχωρά σαν να μην μας είχε δοθεί καμία πληροφορία πέρα από την εκφώνηση του προβλήματος: Αφού η τελική απάντηση ήταν 100 μετά τον διπλασιασμό του αριθμού σημαίνει ότι ο αριθμός στο προηγούμενο βήμα ήταν $100:2=50$. Ο 50 αυτός προκύπτει από πρόσθεση του 1 σε κάποιον αριθμό. Οπότε, στο προηγούμενο βήμα, ο αριθμός ήταν υποχρεωτικά ο $50-1=49$. Τέλος, ο 49 προκύπτει από πολλαπλασιασμό του αριθμού που σκέφτηκε ο κύριος Λογάριθμος επί τον εαυτό του. Ο μόνος αριθμός που έχει αυτή την ιδιότητα, είναι ο 7, που είναι ο ζητούμενος.

24) Δ) 12

Πηδώντας μόνο προς τα πάνω, το καγκουρό δεν μπορεί να φτάσει το 22^{o} σκαλοπάτι γιατί τα προς τα πάνω πηδήματα το ανεβάζουν στο 3^{o}, στο 6^{o}, στο 9^{o} και λοιπά σκαλοπάτια, δηλαδή μόνο πολλαπλάσια του 3, ενώ το 22 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Άρα το καγκουρό θα πρέπει και να κατέβει τουλάχιστον μία φορά και το ερώτημα είναι πόσες φορές. Αν κατέβαινε *μία* φορά, δηλαδή 4 σκαλοπάτια προς τα κάτω, σημαίνει ότι προς τα πάνω πρέπει να ανέβει $22+4=26$ σκαλοπάτια. Αλλά τέτοια περίπτωση δεν είναι δυνατή, αφού το 26 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Άρα πρέπει να κατέβει τουλάχιστον άλλη μία φορά, που σημαίνει πρέπει να ανέβει $26+4=30$ σκαλοπάτια. Παρατηρούμε ότι το 30 είναι πολλαπλάσιο του 3 και, πραγματικά, υπάρχει τρόπος να φτάσει στο 22^{o} σκαλοπάτι: Να ανέβει 10 φορές από 3 σκαλοπάτια (σύνολο 30) και να κατέβει δύο φορές από τέσσερα ($30-4-4=22$). Συνολικά θα κάνει $10+2=12$ πηδήματα. Με λιγότερα δεν γίνεται.

Επίπεδο 2 – (Ε' και ΣΤ' Δημοτικού)

1) Γ) 13

Τα γράμματα της φράσης ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ, χωρίς να μετράμε αυτά που επαναλαμβάνονται, είναι τα Μ Α Θ Η Τ Ι Κ Ο Σ Δ Γ Ω Ν. Οπότε χρειαζόμαστε 13 χρώματα για τα 13 αυτά ανόμοια γράμματα

2) Γ) 1,5 μέτρα

Αφού όλος ο πίνακας είναι 6 μ. και το μεσαίο κομμάτι 3 μ., σημαίνει ότι τα δύο μικρά κομμάτια μαζί έχουν μήκος $6-3=3$ μ. Άρα το καθένα από τα δύο ίσα κομμάτια θα έχει μήκος 1,5 μέτρα.

3) Α) 8

Η εικόνα δείχνει το τετράγωνο της κυρίας Καγκουρίδου, το οποίο αποτελείται από 8 σπίρτα.

4) Γ) 54

Από τις 15 σειρές οι 13 (δηλαδή όλες εκτός της 6ης και της 13ης) έχουν από 4 καθίσματα η καθεμία, οπότε συνολικά $13 \times 4 = 52$. Σε αυτές προσθέτουμε τα 2 καθίσματα της 6ης σειράς, που σημαίνει το σύνολο των καθισμάτων είναι 52 + 2 = 54.

5) Α) 6 η ώρα το πρωί

Αφού όταν είναι 3 το μεσημέρι στην Αθήνα, τα ρολόγια στη Νέα Υόρκη δείχνουν 8 το πρωί, σημαίνει ότι στη Νέα Υόρκη τα ρολόγια είναι 7 ώρες πιο πίσω. Συγκεκριμένα είναι 4 ώρες από τις 8 μέχρι τις 12 και άλλες 3 από τις 12 έως τις 3, σύνολο 4 + 3 = 7. Ένας άλλος τρόπος να σκεφτούμε είναι να πούμε ότι η 3 η ώρα το μεσημέρι γράφεται και ως 15. Επειδή $15 - 8 = 7$, σημαίνει ότι η υπάρχουν 7 ώρες διαφορά μεταξύ Αθήνας και Νέας Υόρκης. Τώρα, όταν είναι 11 το βράδυ στην Νέα Υόρκη τότε στην Αθήνα, που είναι 7 ώρες πιο μπροστά, θα είναι 6 το πρωί της επόμενης μέρας (έχουμε 1 ώρα από τις 11 το βράδυ μέχρι τα μεσάνυκτα και άλλες 6 ώρες μετά).

6) Δ) 12

Ένας τρόπος να εργαστούμε είναι να κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και μετά να τα προσθέσουμε. Ο τρόπος αυτός, αν και σωστός, είναι χρονοβόρος και υπάρχει μία ουσιαστικά καλύτερη μέθοδος: *Πρώτα* κάνουμε απλοποίηση των κλασμάτων και *μετά* τα προσθέτουμε. Με την απλοποίηση θα παρατηρήσουμε ότι όλα τα κλάσματα είναι ίσα με 2 καθώς $\frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$, $\frac{2+4}{3} = \frac{6}{3} = 2$, $\frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$, $\frac{4+6}{5} = \frac{10}{5} = 2$, $\frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2$ και $\frac{6+8}{7} = \frac{14}{7} = 2$. Το άθροισμά τους είναι $2+2+2+2+2+2=12$.

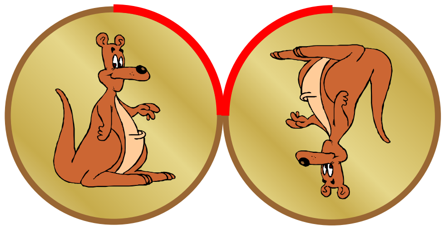
7) Α) 0

Δεν υπάρχει λόγος να πολλαπλασιάσουμε μέχρι το τέλος όλους τους αριθμούς που μας δίνονται. Βέβαια αυτό δεν θα ήταν λάθος, αλλά είναι περιττός κόπος γιατί μπορούμε να βρούμε το τελευταίο ψηφίο χωρίς να κουραστούμε. Πραγματικά, παρατηρούμε ότι το γινόμενο 82×85 έχει τελευταίο ψηφίο το 0 (αυτό το βλέπουμε αμέσως και χωρίς να κάνουμε τον πλήρη πολλαπλασιασμό

$82 \times 85 = 6970$ σκεπτόμενοι ότι $2 \times 5 = 10$). Λόγω του 0 αυτού, το γινόμενο όλων των αριθμών είναι πάλι 0 αφού μηδέν επί οτιδήποτε δίνει 0.

8) Α)

Μπορούμε με δύο κέρματα να δοκιμάσουμε πρακτικά για να διαπιστώσουμε ότι η παρακάτω εικόνα είναι η σωστή. Αυτό είναι άλλωστε αναμενόμενο, γιατί τα κόκκινα τμήματα των δύο κύκλων στα κέρματα, θα είναι ίσα. Οπότε το κυλιόμενο κέρμα θα έρθει σε θέση ανάλογη αυτής του σταθερού, αλλά ανάποδα.



9) Β) Το λάδι είναι περισσότερο από το ξύδι και το νερό μαζί

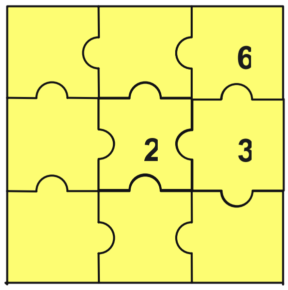
Το λάδι είναι 6 κουταλιές ενώ το ξύδι και το νερό μαζί είναι 5 κουταλιές, που σημαίνει ότι η απάντηση (Β) είναι σωστή. Επίσης μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι καμία από τις άλλες απαντήσεις δεν είναι σωστή.

10) Β) 20 κιλά

Στο δεύτερο σχήμα, με τα δύο μπαλόνια, το παραπάνω βάρος είναι $180 - 80 = 100$ κιλά. Αυτά τα 100 κιλά ουσιαστικά τα σηκώνει το δεύτερο μπαλόνι αφού το καλάθι και τα 80 κιλά τα σηκώνει το πρώτο. Έτσι, αφού στο πρώτο σχήμα το μπαλόνι σηκώνει βάρος 80 κιλών χωρίς το καλάθι, σημαίνει ότι το καλάθι είναι $100 - 80 = 20$ κιλά.

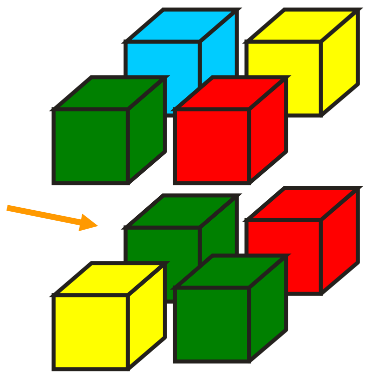
11) Δ) μπορούμε με τα 2, 3, 6

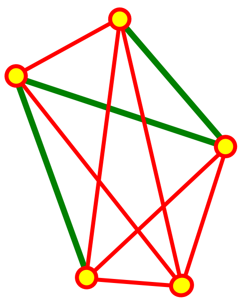
Η εικόνα δείχνει πώς συμπληρώνουμε τα κομμάτια του παζλ.



12) Β) πράσινο

Ο κύβος που δε φαίνεται ακουμπά με το μπλε από πάνω. Επίσης ακουμπά με τον κίτρινο και με τον κόκκινο στο κάτω επίπεδο. Συνεπώς έχει πράσινο χρώμα.

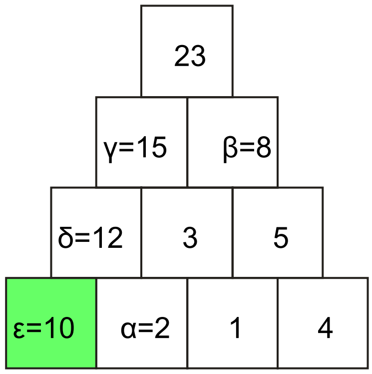




13) Δ) 3

Στην εικόνα βλέπουμε τους 7 ορατούς (κόκκινους) και τους 3 αόρατους (πράσινους) δρόμους.

14) Δ) 10

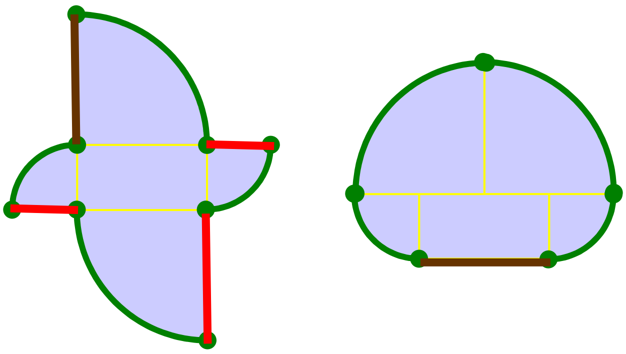


Συμπληρώνουμε τους αριθμούς με τη σειρά α-β-γ-δ-ε στο διπλανό σχήμα. Συγκεκριμένα α=2 για να αθροίζει σωστά το τετραγωνάκι με το 3 από τα δύο αμέσως από κάτω του ($3=2+1$ ή αλλιώς $2=3-1$)). Μετά βλέπουμε $\beta=3+5=8$, $\gamma=23-8=15$, $\delta=15-3=12$ και τέλος $\varepsilon=12-2=10$.

15) Δ) 72 τ.μ.

Παρατηρούμε ότι η περίμετρος αποτελείται από 14 πλευρές του τετραγώνου (τις μετράμε στο σχήμα). Αφού η περίμετρος είναι 42 μ., σημαίνει ότι η κάθε πλευρά είναι $42:14=3$ μ. Άρα το κάθε τετράγωνο έχει εμβαδόν $3\times3=9$ τ.μ. Ο κήπος αποτελείται από 8 τέτοια τετράγωνα, οπότε το εμβαδόν του είναι $8\times9=72$ τ.μ.

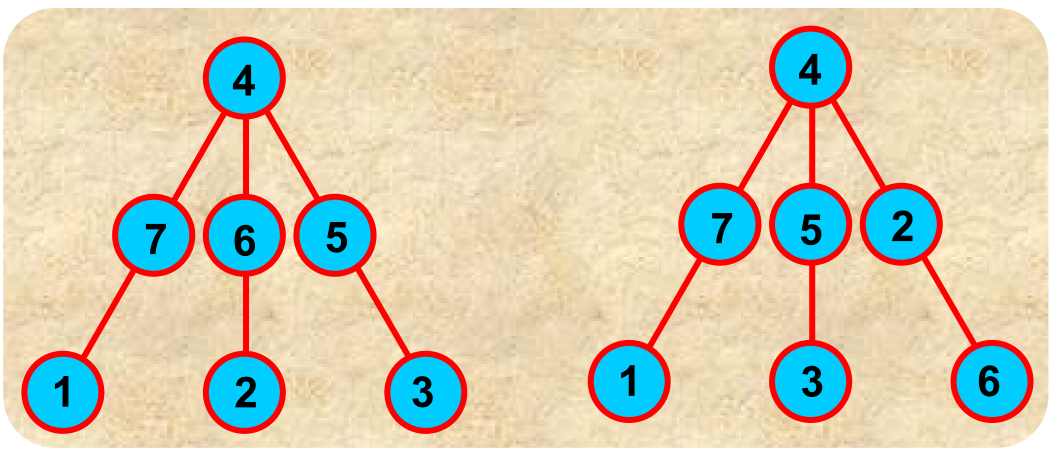
16) Δ) 20 μέτρα



Παρατηρούμε ότι τα καμπυλόγραμμα τμήματα των δύο σχημάτων είναι ολόιδια (δύο μικρά και δύο μεγάλα, σημειωμένα με πράσινο στο σχήμα). Οπότε δεν θα χρειαστεί να τα υπολογίσουμε. Επίσης ένα από τα ίσια τμήματα (το καφετί στο σχήμα) είναι ίδιο στα δύο σχήματα. Η μόνη διαφορά μεταξύ των δύο σχημάτων είναι ότι το αριστερό έχει παραπάνω μία από τις μεγάλες γραμμές και δύο από τις μικρές (κόκκινες στο αριστερό σχήμα). Η μεγάλη κόκκινη γραμμή είναι ίση με τη μία πλευρά του ορθογωνίου και κάθε μικρή ίση με την άλλη. Οπότε το αριστερό σχήμα είναι κατά $10+5+5=20$ μέτρα μεγαλύτερο από το δεξιό.

17) Γ) τον 4

Ο αριθμός στην κορυφή του σχήματος είναι κοινός σε κάθε τριάδα αριθμών σε γραμμή, οπότε δεν επηρεάζει την ισότητα των αθροισμάτων. Το άθροισμα των σημειωμένων αριθμών είναι 1+7=8,



οπότε οι αριθμοί στους δύο κύκλοι (εκτός της κορυφής) σε κάθε τριάδα πρέπει να έχουν άθροισμα 8. Από τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, και 6 που δίνονται, οι μόνες περιπτώσεις με άθροισμα 8 είναι οι 2 + 6 = 3 + 5 = 8. Δηλαδή μένει αχρησιμοποίητος ο 4. Άρα ο 4 μπαίνει στην κορυφή και οι υπόλοιποι στους τέσσερις κενούς κύκλους. Υπάρχουν πολλοί τρόποι συμπλήρωσης του σχήματος αφού, για παράδειγμα, μπορούμε να ανταλλάξουμε τις θέσεις των 2 και 6. Στα σχήματα δίνουμε δύο τρόπους αλλά σημειώνουμε ότι το βέβαιο είναι ότι στη κορυφή μπαίνει ο 4 και κανένας άλλος.

18) Γ) 2

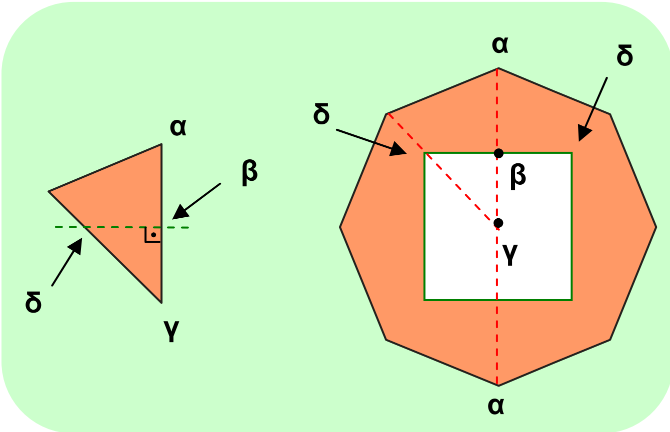
Την πρώτη φορά που θα ανέβει η μπάλα, θα φτάσει σε ύψος $\frac{2}{3}\times 18=12$ μέτρων. Την δεύτερη θα φτάσει σε ύψος $\frac{2}{3}\times 12=8$ μέτρων. Την τρίτη θα είναι λιγότερα από 6 μέτρα γιατί $\frac{2}{3}\times 8=\frac{16}{3}$ και ο αριθμός αυτός είναι μικρότερος του 6. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να το διαπιστώσουμε αυτό. Ένας τρόπος είναι να κάνουμε την διαίρεση. Θα βρούμε 5,333... , πάντως λιγότερο από 6. Αλλιώς, απλοποιούμε το κλάσμα, το οποίο γράφεται $\frac{16}{3}=5+\frac{1}{3}$, δηλαδή ένας αριθμός ανάμεσα στο 5 και το 6.

19) Α) 3

1ος τρόπος: Η στροφή ενός γραναζιού κατά ένα δοντάκι, σημαίνει στροφή του γραναζιού που εμπλέκεται με αυτό κατά ένα δοντάκι. Αφού το πρώτο γρανάζι θα κινηθεί κατά μία στροφή, δηλαδή κατά 30 δοντάκια, κάθε γρανάζι θα κινηθεί επίσης κατά 30 δοντάκια. Ειδικά το τελευταίο, που έχει 10 δοντάκια, θα γυρίσει 3 ολόκληρους κύκλους όταν θα κάνει στροφή 30 δοντιών. Ας σημειωθεί ότι ο συλλογισμός αυτός δείχνει ότι το τελευταίο γρανάζι θα κάνει 3 στροφές ανεξάρτητα από το πόσα γρανάζια υπάρχουν στο ενδιάμεσο και ανεξάρτητα από το πόσα δοντάκια έχουν αυτά τα ενδιάμεσα γρανάζια.

2ος τρόπος: Αφού το πρώτο γρανάζι έχει 30 δοντάκια και το δεύτερο 15, σημαίνει ότι όταν το πρώτο κάνει έναν γύρο, το δεύτερο θα κάνει $\frac{30}{15}$ γύρους (αυτό βέβαια ισούται με 2, αλλά δεν θα χρειαστεί να κάνουμε από τώρα την απλοποίηση). Το τρίτο γρανάζι, με τα 60 δοντάκια, θα κάνει $\frac{15}{60}$ γύρους για κάθε έναν του δεύτερου, οπότε θα κάνει $\frac{30}{15}\times\frac{15}{60}$ γύρους για κάθε γύρο του πρώτου. Με όμοιο συλλογισμό καταλήγουμε ότι το τέταρτο θα κάνει $\frac{30}{15}\times\frac{15}{60}\times\frac{60}{10}=\frac{30}{10}=3$ γύρους για κάθε γύρο του πρώτου. Ας σημειωθεί ότι ο παρονομαστής κάθε κλάσματος απλοποιείται με τον αριθμητή του επόμενου. Συνεπώς δεν έχει σημασία πόσα είναι τα δοντάκια των ενδιάμεσων γραναζιών ούτε πόσα είναι τα ενδιάμεσα γρανάζια. Αυτό που έχει σημασία είναι η σύγκριση του πρώτου και του τελευταίου γραναζιού.

20) Γ)

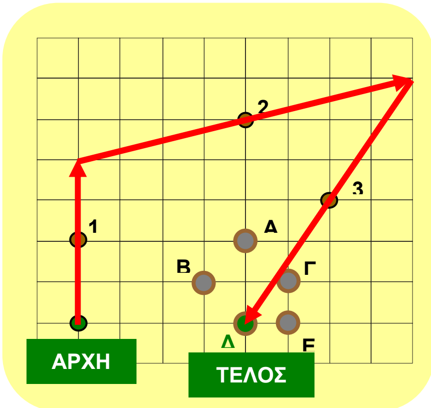


Επειδή η ψαλιδιά στο σημείο β (βλέπε το αριστερό σχήμα) είναι κάθετη στην αγ, η εγκοπή βδ στο άνοιγμα του χαρτιού θα γίνει η ευθεία δβδ. Αυτό σημαίνει ότι το κομμένο τμήμα θα έχει, μετά τα δύο ξεδιπλώματα, τέσσερεις πλευρές, όχι οκτώ όπως έχουν κάποιες από τις υπόλοιπες εικόνες, Οπότε οι περιπτώσεις (Β), (Δ) και (Ε) αποκλείονται. Επίσης, με το άνοιγμα του χαρτιού, το σημείο α στη κορυφή θα πάει σε δύο μέρη, το ένα ακριβώς από πάνω και το άλλο ακριβώς από κάτω από το β, σχηματίζοντας της ευθεία αβα. Συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο σχήμα είναι το (Γ), όπως δείχνει το δεξί σχήμα.

21) Β) 13

Η Θάλεια έφαγε $1+3=4$ φρούτα και ο Ερμής $3+2=5$, οπότε μαζί έφαγαν $4+5=9$ φρούτα συνολικά. Αφού στην αρχή τα φρούτα ήσαν 25, τώρα έμειναν $25-9=16$. Ξέρουμε όμως ότι έμεινε ίσος αριθμός μήλων και πορτοκαλιών, οπότε από τα 16 που έμειναν, τα 8 είναι μήλα και τα άλλα 8, πορτοκάλια. Τώρα, αφού η Θάλεια και ο Ερμής μαζί έφαγαν $3+2=5$ πορτοκάλια, ο αρχικός αριθμός των πορτοκαλιών ήταν $8+5=13$.

22) Δ) Δ



Στην εικόνα βλέπουμε την διαδρομή του δεύτερου καγκουρό. Σε κάθε πήδημα η πέτρα είναι στη μέση της γραμμής που ενώνει την αρχή με το τέλος του πηδήματος. Τα τετραγωνάκια μας βοηθούν να προσδιορίσουμε με ακρίβεια την θέση του καγκουρό μετά από κάθε άλμα. Το τελικό σημείο είναι το Δ.

23) Δ) 30

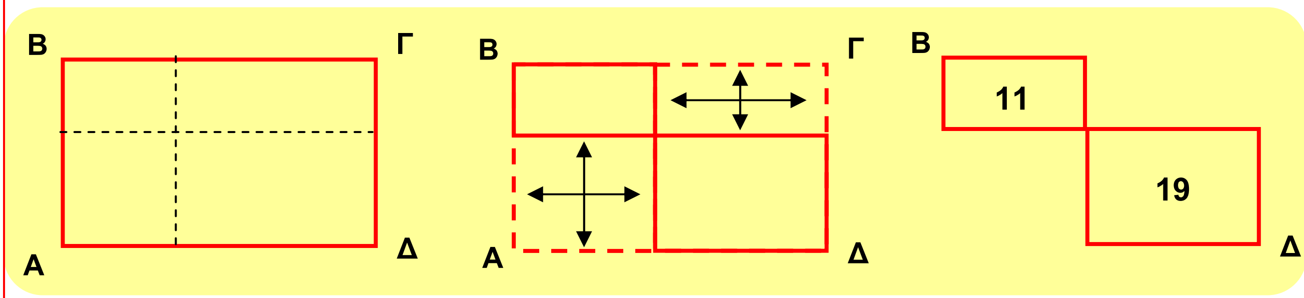
Αφού τα παιδιά ηλικίας 4 χρονών ήσαν περισσότερα από τα (τρία) παιδιά των 2 χρονών, θα πει ότι υπήρχαν τουλάχιστον 4 παιδιά 4 χρονών. Έτσι το σύνολο των παιδιών ηλικίας 2 ή 4 είναι τουλάχιστον 7. Αφού τα παιδιά είναι συνολικά 9, σημαίνει ότι (ακριβώς) ένα παιδί είναι 3 χρονών και (ακριβώς) ένα παιδί είναι 5 χρονών: δεν μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα παιδιά ηλικίας 3 ή 5 γιατί τότε το σύνολο των παιδιών (μαζί με τα 7 αρχικά) θα ήσαν περισσότερα από 9. Έτσι έχουμε

- 3 παιδιά ηλικίας 2 (με άθροισμα ηλικιών $3\times2=6$)
- 1 παιδί ηλικίας 3,
- 4 παιδιά ηλικίας 4 (με άθροισμα ηλικιών $4\times4=16$)
- 1 παιδί ηλικίας 5,

Συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα των ηλικιών των 9 παιδιών είναι 6 + 3 + 16 + 5 =30.

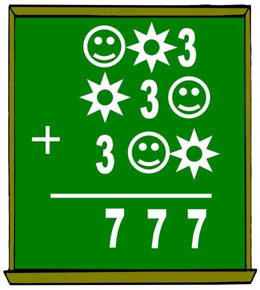
24) Β) 30

Θέλουμε να βρούμε το μήκος της κόκκινης γραμμής στο αριστερό σχήμα. Παρατηρούμε ότι είναι ίση με την κόκκινη γραμμή στο δεξιό σχήμα γιατί οι δύο αυτές γραμμές αποτελούνται από ακριβώς ίδια τμήματα. Η εικόνα στη μέση δείχνει τα ζεύγη των ίσων μεταξύ τους τμημάτων. Επίσης παρατηρούμε ότι η κόκκινη γραμμή δεξιά ισούται με το άθροισμα των περιμέτρων των δύο ορθογωνίων, του πάνω αριστερά και του κάτω δεξιά. Επομένως η ζητούμενη περίμετρος είναι 11 + 19 = 30 μέτρα.



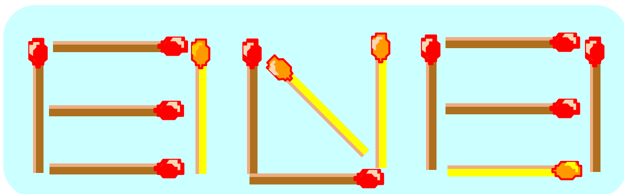
25) Α) 777

Στην πρόσθεση που μας δίνεται, σε κάθε στήλη προστίθεται ένα ☺, ένα ✹ και ένα 3 και το αποτέλεσμα είναι 7. Μάλιστα η πρόσθεση είναι χωρίς κρατούμενο, όπως μπορούμε να κρίνουμε κοιτώντας την αριστερή στήλη (των εκατοντάδων). Στην πρόσθεση που ψάχνουμε το αποτέλεσμα, προσθέτουμε και πάλι ένα ☺, ένα ✹ και ένα 3, με μόνη διαφορά ότι αλλάζει η σειρά των προσθετέων. Όμως η αλλαγή της σειράς των προσθετέων σε ένα άθροισμα δεν αλλάζει το αποτέλεσμα. Άρα το αποτέλεσμα σε κάθε περίπτωση είναι 7, χωρίς κρατούμενο και το συνολικό άθροισμα είναι 777.



26) Β)

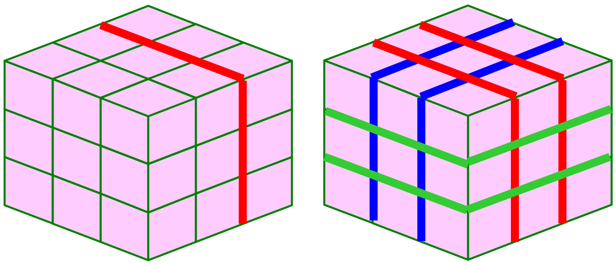
Το αρχικό σχήμα αποτελείται από 14 σπίρτα. Αν αφαιρέσουμε 4, μένουν 10. Από τα σχήματα που εικονίζονται στο πρόβλημα, μόνο ένα, το (Β) αποτελείται από 10 σπίρτα. Επομένως τα άλλα σχήματα *αποκλείεται* να είναι αυτό που έφτιαξε ο Λεονάρδος. Μπορούμε τώρα να ελέγξουμε ότι το σχήμα (Β) είναι κατασκευάσιμο από το αρχικό, με αφαίρεση τεσσάρων σπίρτων.



27) Γ) 54

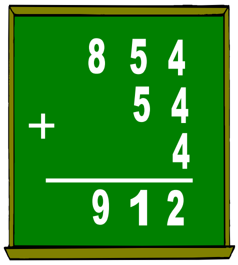
1ος τρόπος: Εξετάζουμε τα διάφορα επίπεδα στο εσωτερικό του μεγάλου κύβου όπου είναι κολλημένες οι έδρες των μικρών κύβων. Η εικόνα αριστερά δείχνει ένα τέτοιο επίπεδο, το οποίο περιέχει την κόκκινη γραμμή. Η γραμμή αυτή περιβάλλει 9 μικρές έδρες όπου μπαίνει από μία σταγόνα κόλλα. Συνολικά έχουμε 6 τέτοια επίπεδα, που στην εικόνα δεξιά είναι δύο στις κόκκινες γραμμές, δύο στις μπλε και δύο στις πράσινες. Όποτε οι σταγόνες που χρειαζόμαστε είναι $9 \times 6 = 54$.

2ος τρόπος: Κάθε κύβος έχει 6 έδρες. Αφού οι κύβοι είναι $3 \times 3 \times 3 = 27$, όλες οι έδρες τους είναι $27 \times 6 = 162$. Από αυτές δεν κολλήθηκαν οι εξωτερικές έδρες, δηλαδή οι $6 \times 9 = 54$. Επομένως κολλήθηκαν $162 - 54 = 108$ έδρες. Αφού ο Δαίδαλος έβαλε μια σταγόνα κάθε δύο έδρες, τελικά έβαλε $108 : 2 = 54$ σταγόνες.



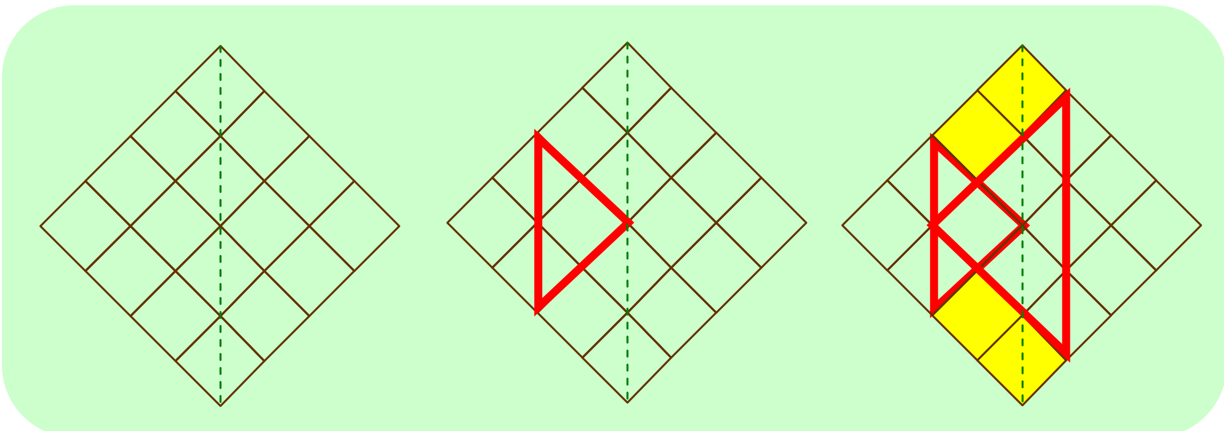
28) Γ) 5

Το άθροισμα των μονάδων είναι $\Gamma + \Gamma + \Gamma = 3 \times \Gamma$, δηλαδή είναι το τριπλάσιο ψηφίου, και λήγει σε 2. Επομένως αρχικά είναι ένας από τους 2, 12, 22 και με έλεγχο βρίσκουμε ότι είναι ο 12 ($12 = 3 \times 4$). Δηλαδή $\Gamma = 4$. Το άθροισμα των ψηφίων των δεκάδων είναι $B + B$ συν 1 το κρατούμενο. Αφού λήγει σε 1, το άθροισμα $B + B = 2 \times B$ λήγει σε 0. Το μόνο μη μηδενικό ψηφίο του οποίου το διπλάσιο λήγει σε 0 είναι το 5 (γιατί $2 \times 5 = 10$). Επομένως $B = 5$. Στον πίνακα δεξιά φαίνεται συμπληρωμένη η πρόσθεση.

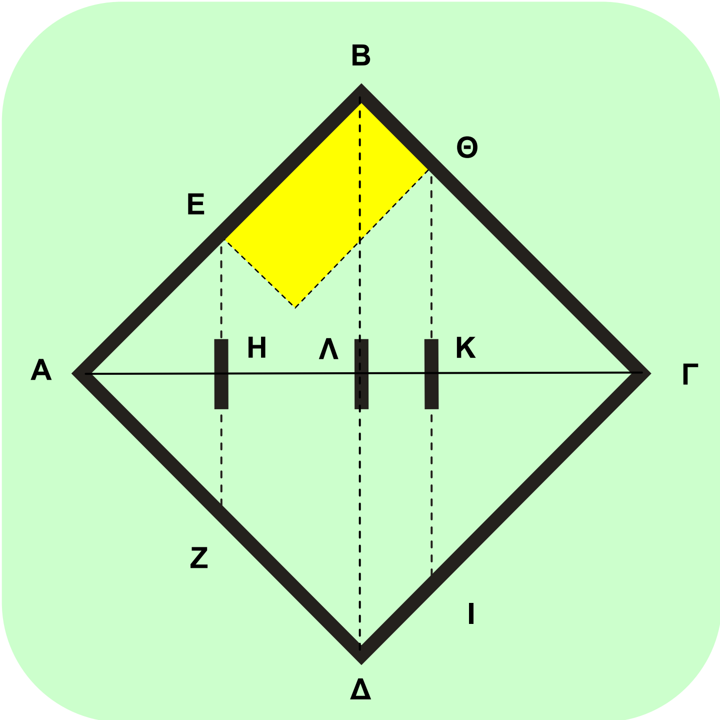


29) Δ) 2 τ.μ.

1ος τρόπος: Ένας εύκολος τρόπος να βρούμε το ζητούμενο εμβαδόν είναι να χωρίσουμε το αρχικό χαρτί σε τετραγωνάκια. Μετά θα μελετήσουμε πάνω στο τετραγωνισμένο χαρτί το σχήμα που προκύπτει από τις δύο διπλώσεις. Η εικόνα αριστερά δείχνει το αρχικό 4×4 τετράγωνο χωρισμένο σε 16 μικρότερα, το καθένα με πλευρά 1 μέτρου. Η δεύτερη και τρίτη εικόνα δείχνουν τις διπλώσεις του χαρτιού. Το ζητούμενο κίτρινο εμβαδόν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις $1 \times 2 = 2$ τ.μ.

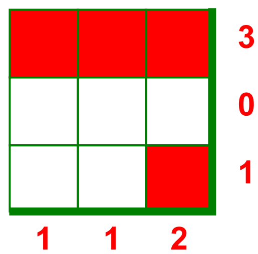


2ος τρόπος: Το πρώτο δίπλωμα γίνεται κατά την ΕΖ οπότε Α θα πέσει στο Λ και το Η είναι το μέσο της ΑΛ. Αφού το Η είναι το μέσον της ΑΛ, το Ε θα είναι το μέσον του ΑΒ, οπότε ΕΒ = 2 μέτρα. Επίσης το ΑΗ είναι το $\frac{1}{4}$ της διαγωνίου, άρα το ΓΗ είναι τα $\frac{3}{4}$ της διαγωνίου. Με την δεύτερη δίπλωση το Γ πέφτει στο Η όταν διπλωθεί στο μέσο Κ της ΗΓ. Το ΓΚ είναι το $\frac{1}{2}$ του ΓΗ άρα το $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ της διαγωνίου, οπότε τα $\frac{3}{4}$ της ΓΛ. Έτσι το ΓΘ είναι τα $\frac{3}{4}$ της ΓΒ, δηλαδή 3 μέτρα, που σημαίνει ότι το ΒΘ είναι 1 μέτρο. Τώρα βλέπουμε ότι το κίτρινο παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν ΕΒ $\times$ ΒΘ = 2 $\times$ 1 = 2 τ.μ.



30) Ε)

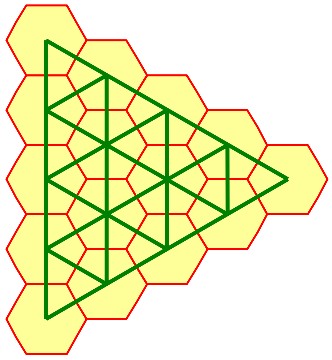
Το Α) αποκλείεται να είναι το αποτέλεσμα της ζωγραφιάς του καλλιτέχνη γιατί η πρώτη γραμμή έχει 3 κόκκινα τετραγωνάκια. Ειδικά θα είναι κόκκινο το πάνω αριστερά τετραγωνάκι. Αλλά αυτό δεν ταιριάζει με την πληροφορία ότι στην πρώτη στήλη κανένα τετραγωνάκι δεν είναι κόκκινο (στο περιθώριο κάτω είναι γραμμένος ο αριθμός 0). Για παρόμοια αιτία δεν μπορεί η ζωγραφιά να είναι η Δ) λόγω του 3 στην μεσαία γραμμή και του 0 στη μεσαία στήλη. Οι Β) και Γ) αποκλείονται αλλά η αιτία είναι κάπως διαφορετική από την προηγούμενη. Ας δούμε την πρώτα την περίπτωση του Β). Στο περιθώριο δεξιά βλέπουμε τους αριθμούς 3, 2 και 1. Αυτό σημαίνει ότι το πλήθος των ζωγραφισμένων κόκκινων τετραγώνων είναι 3 + 2 + 1 = 6. Όμως αν δούμε τους αριθμούς στο κάτω περιθώριο, είναι οι 1, 2 και 2. Σύμφωνα με αυτούς, το πλήθος των κόκκινων τετραγώνων θα έπρεπε να είναι 1 + 2 + 2 = 5, που είναι βέβαια διαφορετικό από το 6 που βρήκαμε πριν. Άρα δεν υπάρχει πίνακας που να ταιριάζει σε αυτά τα νούμερα. Η περίπτωση του Γ) είναι παρόμοια. Από την μία τα κόκκινα τετραγωνάκια είναι 3 + 2 + 1 = 6 (από τους αριθμούς δεξιά) και από την άλλη 3 + 2 + 2 = 7, από τους αριθμούς στο κάτω περιθώριο. Άρα ούτε ο πίνακας Γ) μπορεί να προκύψει από ζωγραφιά. Μένει μόνο η περίπτωση του Ε). Το πρόβλημα δεν μας ζητά να βρούμε την ζωγραφιά από όπου προκύπτει, μπορούμε όμως εύκολα να την βρούμε: Κοκκινίζουμε τα 3 τετραγωνάκια της πρώτης γραμμής λόγω του 3 στο περιθώριο δεξιά. Τώρα η πρώτη και η δεύτερη στήλη έχουν από ένα κόκκινο τετραγωνάκι, άρα τα υπόλοιπα στις στήλες αυτές είναι άβαφα. Τέλος βλέπουμε ότι πρέπει να βάψουμε και το κάτω δεξιά τετραγωνάκι. Το αποτέλεσμα είναι η ζωγραφιά δεξιά.



Επίπεδο 3 – (Α' και Β' Γυμνασίου)

1) Γ)

Το κέντρο συμμετρίας του εξαγώνου είναι στο κέντρο του. Η εικόνα δείχνει τη ζωγραφιά που προκύπτει αν ενώσουμε τα κέντρα συμμετρίας οποιωνδήποτε δύο *γειτονικών* εξαγώνων.



2) Β) 16

Αν από τα τέσσερα κουτιά αφαιρέσουμε το ένα, μένουν τρία. Αφού τα τρία κουτιά έχουν 48 σοκολατάκια συμπεραίνουμε ότι το ένα έχει 16.

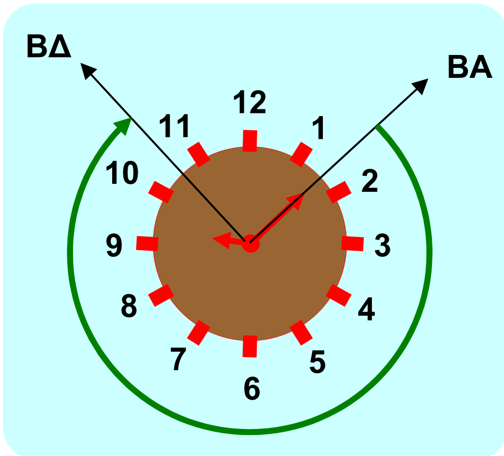
3) Δ) 9,999

Η αφαίρεση φαίνεται δεξιά.

$$\begin{array}{r} 11{,}110 \\ -\quad 1{,}111 \\ \hline 9{,}999 \end{array}$$

4) Α) σε 45 λεπτά

Η εικόνα δείχνει το ρολόι και την τοποθέτησή του ώστε ο λεπτοδείκτης να δείχνει βορειοανατολικά. Το ποια ακριβώς ώρα δείχνει το ρολόι εκείνη τη στιγμή, δεν έχει ιδιαίτερη σημασία. Αυτό που μετράει είναι η γωνία μεταξύ της αρχικής και της τελικής θέσης του λεπτοδείκτη και ο χρόνος που χρειάζεται για να μετακινηθεί. Εφόσον ο λεπτοδείκτης θα μετακινηθεί κατά γωνία ίση με τα $\frac{3}{4}$ του κύκλου, που αντιστοιχεί σε $\frac{3}{4}$ της ώρας, σημαίνει ότι χρειάζεται 45 λεπτά.



5) Δ) 41

Ο $10^5 - 2012$ γράφεται $100000 - 2012 = 97988$. Το άθροισμα των ψηφίων είναι $9+7+9+8+8=41$.

6) Γ) 29

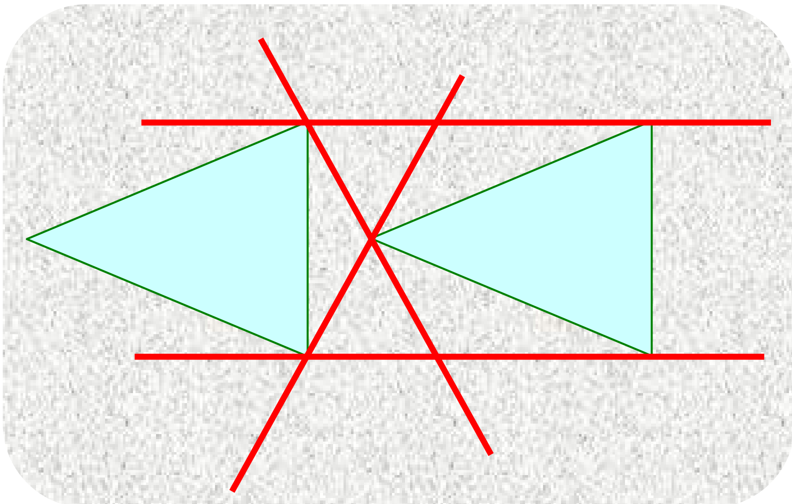
Με κάθε σπαθιά η Λερναία Ύδρα αυξάνει τα κεφάλια της κατά 4 (που είναι 5 καινούργια μείον το κομμένο). Με τις 6 σπαθιές θα αυξηθούν τα κεφάλια της κατά $6 \cdot 4 = 24$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι αρχικά είχε 5, στο τέλος θα έχει $5 + 24 = 29$.

7) Ε) $\dfrac{8+8-8}{8}$

Αν κάνουμε τις πράξεις στις δοθείσες παραστάσεις με οκτάρια θα βρούμε, αντίστοιχα, $\dfrac{8+8}{8}+8=10$, $\dfrac{8\times(8+8)}{8}=16$, $8+8-8+8=16$, $(8+8-8)\times 8=64$ και $\dfrac{8+8-8}{8}=1$ ενώ με επτάρια θα βρούμε $\dfrac{7+7}{7}+7=9$, $\dfrac{7\times(7+7)}{7}=14$, $7+7-7+7=14$, $(7+7-7)\times 7=49$ και $\dfrac{7+7-7}{7}=1$. Συγκρίνοντας, βλέπουμε ότι μόνο η (Ε) δεν άλλαξε τιμή. Ας προστεθεί ότι για τα αποτελέσματα των πράξεων αυτών μπορούμε, και οφείλουμε, να κάνουμε απλοποιήσεις για να γλιτώσουμε χρόνο. Στο (Ε), για παράδειγμα, μπορούμε να το εντοπίσουμε εύκολα ότι δεν αλλάζει τιμή, λόγω των απλοποιήσεων. Γενικότερα, η παράσταση (Ε) δεν αλλάζει τιμή όποιον μη μηδενικό αριθμό Α και αν βάλουμε στη θέση του 8 καθώς $\dfrac{A+A-A}{A}=\dfrac{A}{A}=1$.

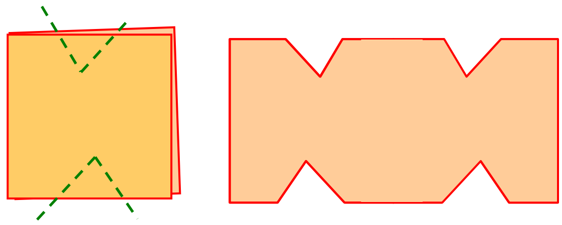
8) Δ) 4

Ο Πυθαγόρας μπορεί να ζωγραφίσει 4 ευθείες. Η εικόνα δείχνει όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

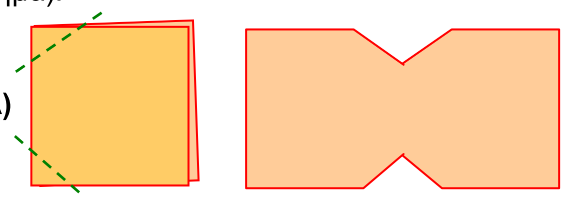


9) Δ)

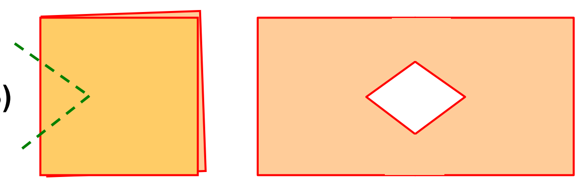
Το αποτέλεσμα που *δεν προκύπτει* από δύο ίσιες ψαλιδιές στο διπλωμένο χαρτί είναι το (Δ). Η εικόνα δείχνει τον τρόπο που προκύπτουν τα υπόλοιπα σχήματα. Για το (Δ) χρειάζονται 4 ψαλιδιές (δεξί σχήμα).



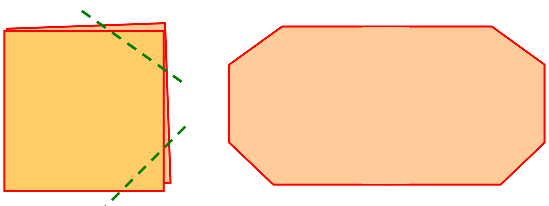
Α)



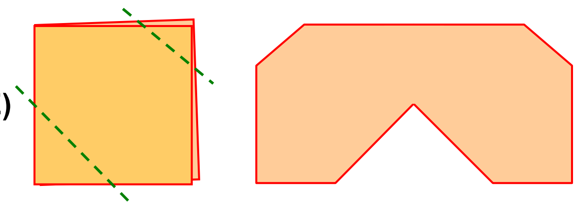
Β)



Γ)

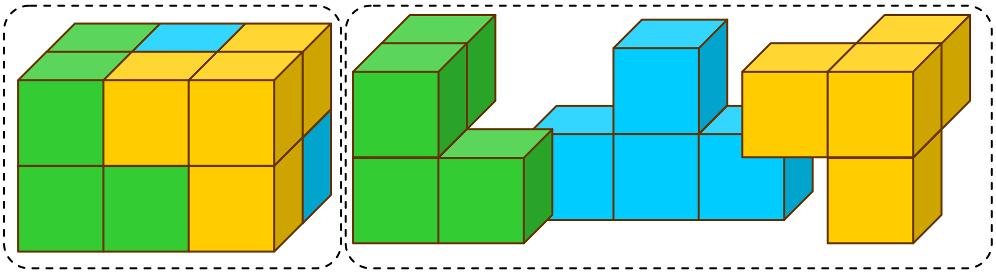


Ε)



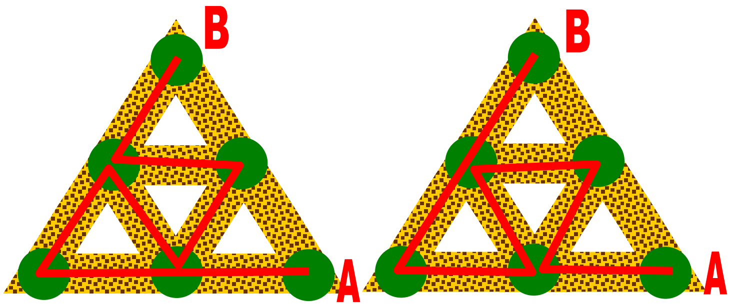
10) Δ)

Το σχήμα δεξιά δείχνει τα κομμάτια.



11) Γ) 700 μέτρα

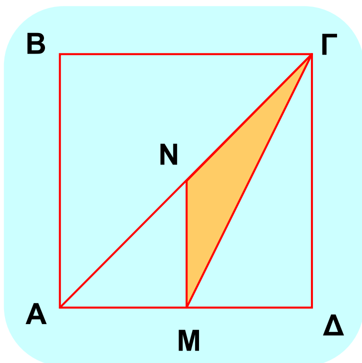
Δεν είναι δυνατόν ο Οδυσσέας να διασχίσει και τα δύο μονοπάτια που έχουν το Α ως ένα άκρο. Ο λόγος είναι ότι, ξεκινώντας από το σημείο Α, θα πάρει ένα από τα δύο μονοπάτια. Αμέσως αποκλείεται το άλλο γιατί εάν το πάρει, θα το κάνει για επιστρέψει στο σημείο Α. Αλλά τότε δεν μπορεί να ξαναφύγει, χωρίς να περάσει δεύτερη φορά από μονοπάτι. Άρα ο Οδυσσέας θα κάνει διαδρομή το πολύ 8 μονοπατιών. Για την ακρίβεια δεν μπορεί ούτε 8 γιατί δεν είναι δυνατόν να περάσει και από τα δύο μονοπάτια που έχουν άκρο το Β. Ο συλλογισμός είναι παρόμοιος με την περίπτωση του Α: Μόλις οδηγηθεί στο σημείο Β από ένα από τα δύο μονοπάτια, αποκλείεται το άλλο γιατί αν το πάρει, δεν θα έχει τρόπο να επιστρέψει στο Β χωρίς να ξαναδιασχίσει μονοπάτι. Άρα ο Οδυσσέας έχει διαδρομή το πολύ 7 μονοπατιών. Τώρα το ερώτημα είναι αν πραγματικά υπάρχει τέτοια διαδρομή. Η απάντηση είναι καταφατική. Μάλιστα έχει πολλούς τρόπους να το κάνει. Η εικόνα δείχνει δύο τέτοιους τρόπους. Η διαδρομή έχει μήκος 700 μέτρα. Παραπάνω δεν γίνεται.



12) Δ) 18

Ο αριθμός που ψάχνουμε είναι από τον 10 έως και τον 36. Δεν μπορεί το πρώτο ψηφίο να είναι 1 γιατί το άθροισμα των ψηφίων του θα ήταν το πολύ 1+9 = 10, πάντως μικρότερο του 11. Από τους διψήφιους αριθμούς με πρώτο ψηφίο το 2, μόνο ο 29 έχει άθροισμα ψηφίων 11 ενώ όλοι οι υπόλοιποι λιγότερο. Από τους αριθμούς 30, 31, 32, 33, 34, 35 και 36 που δεν εξετάσαμε ακόμη, κανείς δεν έχει άθροισμα ψηφίων 11. Άρα ο μόνος αριθμός που ταιριάζει στις συνθήκες είναι ο 29, με γινόμενο ψηφίων ίσο με 18.

13) Γ) 2 τ.μ

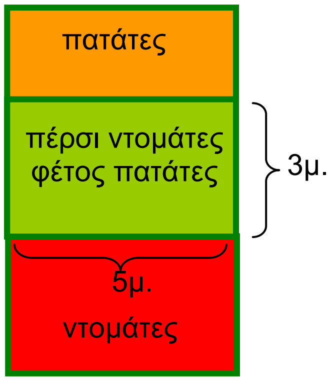


Τα τρίγωνα ΜΝΓ και ΜΝΑ έχουν ίσα εμβαδά γιατί η διάμεσος ΜΝ του τριγώνου ΜΑΓ το χωρίζει σε δύο ισεμβαδικά μέρη (τα τρίγωνα αυτά έχουν ίσες βάσεις, ΑΝ = ΝΓ και κοινό ύψος από το Μ στη βάση ΑΓ). Αυτό σημαίνει ότι το εμβαδόν του ΜΓΝ είναι το μισό του ΜΓΑ. Όμως το εμβαδόν του ΜΓΑ είναι $\frac{1}{2}AM \cdot \Gamma\Delta = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$. Άρα το εμβαδόν του ΓΜΝ είναι 2 τ.μ.

14) Γ) οπωσδήποτε πράσινο

Ξέρουμε ότι η βαφή των αριθμών είναι ανά τριάδες διαδοχικών, κόκκινο-μπλε-πράσινο. Κάθε αριθμός ενός χρώματος είναι κατά 3 μονάδες μεγαλύτερος από τον προηγούμενο του ιδίου χρώματος. Συγκεκριμένα, οι κόκκινοι αριθμοί είναι οι 1, 4, 7, 10 και λοιπά, δηλαδή οι αριθμοί που αφήνουν υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθούν με το 3. Οι μπλε είναι οι 2, 5, 8, 11 και λοιπά, που αφήνουν υπόλοιπο 2 με την διαίρεση δια 3 και, τέλος, οι πράσινοι είναι τα πολλαπλάσια του 3. Αν προσθέσουμε έναν κόκκινο και έναν μπλε, τότε τα υπόλοιπά τους 1 και 2 έχουν άθροισμα 3, οπότε καταλήγουμε σε πολλαπλάσιο του 3. Με σύμβολα, κόκκινο + μπλε = (3Α+1)+(3Β+2)= 3Α+3Β+3= 3(Α+Β+1) , που είναι πολλαπλάσιο του 3. Δηλαδή καταλήγουμε σε πράσινο αριθμό.

15) Γ) 10 τ.μ.



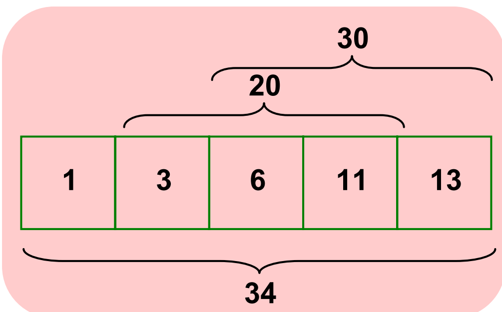
Το μέρος του κήπου που άλλαξε είναι το πράσινο στο σχήμα. Η μία του διάσταση είναι, κατά το πρόβλημα, 3 μέτρα. Εφόσον το εμβαδόν του είναι 15 τ.μ., σημαίνει ότι η άλλη του διάσταση είναι 5 μέτρα. Δηλαδή φέτος το μέρος του κήπου με τις πατάτες, που ξέρουμε ότι είναι τετράγωνο με μία διάσταση 5 μέτρων, έχει εμβαδόν $5 \times 5 = 25$ τ.μ. Άρα πέρσι, που ήταν 15 τ.μ. λιγότερα από φέτος, είχε εμβαδόν 25-15=10 τ.μ.

16) Β) 6

1	**9-x**	**x**	**17-x**	**13**

1ος τρόπος: Μπορούμε να εργαστούμε με εξίσωση, αλλά παρακάτω θα δώσουμε μία διαφορετική λύση, χωρίς εξίσωση. Ας ονομάσουμε x τον μεσαίο αριθμό. Έτσι από τους τρεις αριστερούς, ο πρώτος είναι ο 1, και ο τρίτος x. Όμως το άθροισμα των τριών αριστερών είναι 10. Συμπεραίνουμε ότι ο δεύτερος είναι ο 10 – 1 - x = 9 - x. Όμοια, οι τρεις τελευταίοι έχουν άθροισμα 30 από τους οποίους ο ένας είναι ίσος με x και ένας άλλος είναι ίσος με 13. Οπότε ο τρίτος από αυτούς είναι ο 30 – x – 13 = 17 - x. Με άλλα λόγια οι τρεις αριθμοί στο κέντρο είναι $9 - x$, x και $17 - x$. Το άθροισμά τους μας δίνεται ως 20, δηλαδή ισχύει $(9 - x) + x + (17 - x) = 20$. Η εξίσωση γράφεται $26 - x = 20$, από όπου $x = 6$.

2ος τρόπος: Το άθροισμα όλων των αριθμών ισούται με το άθροισμα των τριών μεσαίων (που ξέρουμε ότι είναι 20) και των δύο ακριανών, 1 και 13, δηλαδή είναι $20 + 1 + 13 = 34$. Αφού οι τρεις πρώτοι έχουν άθροισμα 10 και όλοι 34, σημαίνει ότι οι δύο τελευταίοι έχουν άθροισμα $34 - 10 = 24$, οπότε ο τέταρτος είναι $24 - 13 = 11$. Με παρόμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα των δύο πρώτων είναι $34 - 30 = 4$, άρα ο δεύτερος είναι $4 - 1 = 3$. Δηλαδή από τους τρείς μεσαίους, που ξέρουμε ότι έχουν άθροισμα 20, οι δύο είναι οι 3 και 11. Άρα ο άλλος είναι ο $20 - 3 - 11 = 6$.



17) Β) Το λάδι είναι περισσότερο από το ξύδι και το νερό μαζί

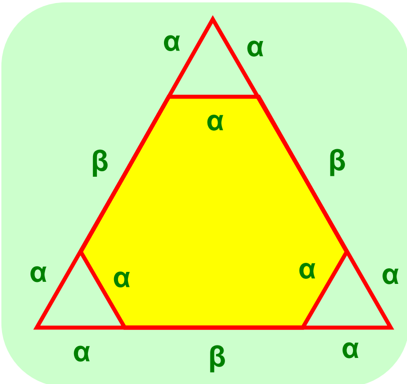
Για κάθε κουταλιά λάδι έχουμε 1/2 της κουταλιάς ξύδι και 1/3 της κουταλιάς νερό. Που σημαίνει ότι σε κάθε 6 κουταλιές λάδι έχουμε 3 κουταλιές ξύδι και 2 νερό. Έτσι, σε κάθε 6 κουταλιές λάδι έχουμε 5 κουταλιές ξύδι και το νερό μαζί. Άρα σωστή απάντηση είναι η (Β). Επίσης, μπορούμε να ελέγξουμε ότι καμία από τις άλλες απαντήσεις δεν είναι σωστή.

18) Ε) 50 cm

1ος τρόπος: Με εξίσωση. Αν x cm το μήκος της πιο μικρής οδοντογλυφίδας, τότε τα μήκη των υπόλοιπων είναι $x+2$, $x+4$, $x+6$ και $x+8$. Το δεδομένο είναι ότι $x+(x+2) = x+8$. Λύνοντας την εξίσωση θα βρούμε $x=6$. Άρα τα μήκη τους είναι 6, 8, 10, 12 και 14 cm. Το άθροισμα αυτών είναι 50 cm.

2ος τρόπος: Τα μήκη των οδοντογλυφίδων είναι, αντίστοιχα, όσο η πιο μικρή συν 2, συν 4, συν 6 και συν 8 cm. Το δεδομένο του προβλήματος είναι ότι αν στην μικρότερη προσθέσουμε την δεύτερη πιο μεγάλη θα προκύψει μήκος όσο η μεγαλύτερη, δηλαδή 8 cm παραπάνω από την μικρότερη. Άρα η δεύτερη πιο μεγάλη έχει μήκος 8 cm. Αυτό σημαίνει ότι τα μήκη των οδοντογλυφίδων είναι 6, 8, 10, 12 και 14 cm αντίστοιχα, των οποίων το άθροισμα είναι 50 cm.

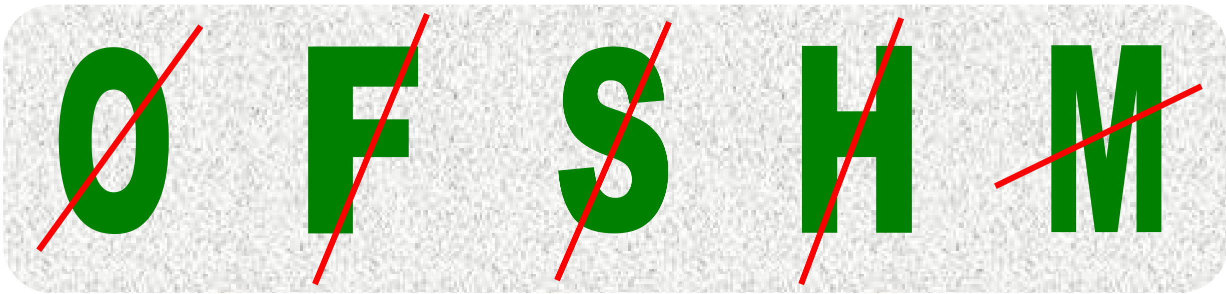
19) Δ) 1,5 μέτρα



Η περίμετρος του κίτρινου εσωτερικού εξαγώνου αποτελείται από 3 μικρές πλευρές μήκους α και από 3 μεγάλες μήκους β. Τα τρία μικρά τρίγωνα αποτελούνται από 9 μικρές πλευρές μήκους α. Τρεις από τις μικρές πλευρές είναι κοινές στα δύο σχήματα. Αφού οι περίμετροι των δύο σχημάτων είναι ίσες, σημαίνει ότι 3β = 6α. Άρα κάθε μεγάλη πλευρά μήκους β ισούται με 2α. Συμπεραίνουμε ότι το εξωτερικό μεγάλο τρίγωνο έχει πλευρά 2α + β = 4α. Μας δίνεται ότι 4α = 6 μέτρα, οπότε α = $\frac{1}{4}\cdot 6 = 1{,}5$ μέτρα, δηλαδή η μικρή πλευρά είναι 1,5 μέτρα.

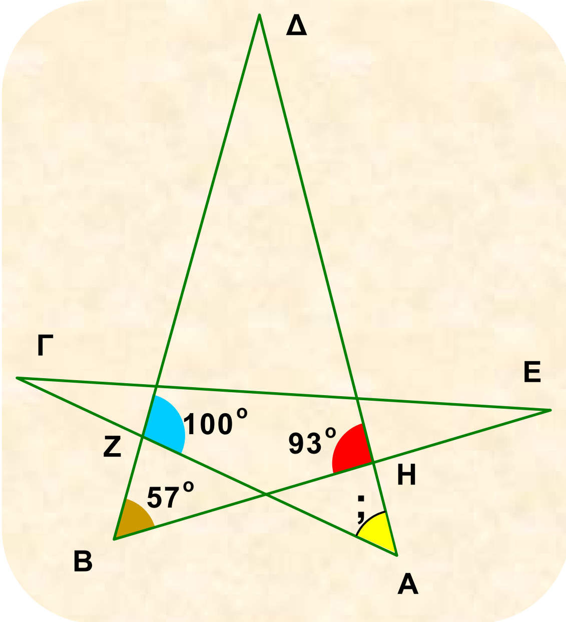
20) Ε) Μ

Η παρακάτω ψαλιδιές δείχνουν το μεγαλύτερο δυνατό αριθμό κομματιών σε κάθε γράμμα χωριστά. Συγκεκριμένα, το Ο κόβεται σε 2, το F σε 4, το S σε 3, το H σε 4 και το M σε 5. Τα πιο πολλά τα έχει το Μ.



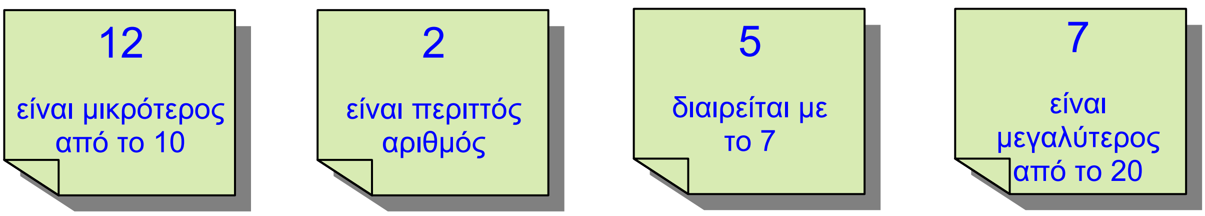
21) Γ) 50^o

Από το τρίγωνο ΒΔΗ συμπεραίνουμε ότι η γωνία Δ ισούται με $180^0 - 57^0 - 93^0 = 30^0$. Τώρα από το τρίγωνο ΑΖΔ έχουμε $A = 180^0 - 100^0 - 30^0 = 50^0$.



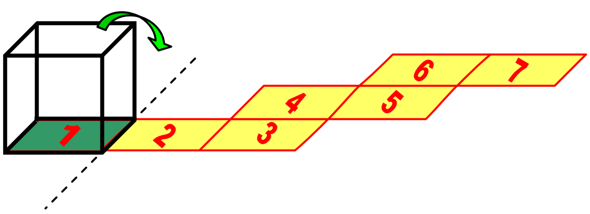
22) Γ) 7

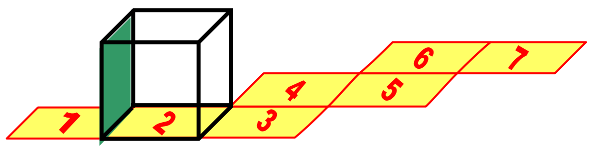
Το χαρτί που λέει «είναι μικρότερος από το 10» περιέχει τον 12 γιατί μόνο αυτός από τους δοθέντες δεν αντιστοιχεί αυτό που δηλώνει η πρόταση. Από τους υπόλοιπους, δηλαδή τους 2, 5, 7, ο 2 πρέπει να είναι στο χαρτί με την πρόταση «είναι περιττός αριθμός» γιατί μόνον αυτός δεν αντιστοιχεί στη πρόταση. Μένουν οι αριθμοί 5 και 7 και οι προτάσεις «διαιρείται με το 7» και «είναι μεγαλύτερος από το 20». Είναι φανερό ότι ο 5 θα είναι στο χαρτί «διαιρείται με το 7» (γιατί δεν μπορεί να είναι ο 7). Μένει ο 7 να είναι στο χαρτί με την πρόταση «είναι μεγαλύτερος από το 20». Η εικόνα συνοψίζει τα αποτελέσματα.

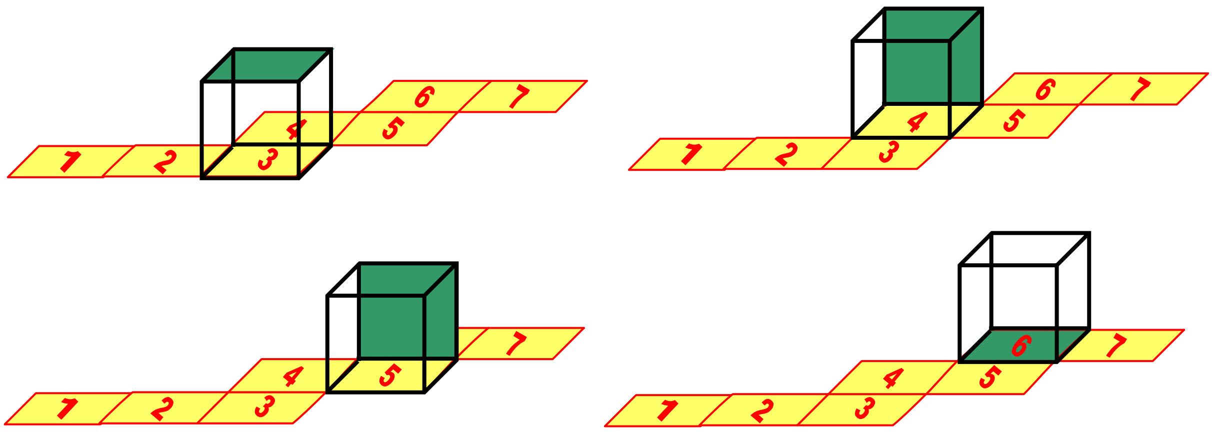


23) Δ) όταν ο κύβος φτάσει στη θέση 6

Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε τις διαδοχικές θέσεις του κύβου. Αν παρακολουθήσουμε την έδρα που ήταν αρχικά στη βάση του, όταν ο κύβος ήταν στη θέση 1, θα παρατηρήσουμε ότι θα ξαναγίνει η βάση του όταν ο κύβος φτάσει στη θέση 6. Οι διαδοχικές θέσεις αυτής της έδρας είναι χρωματισμένες πράσινες.







24) Γ) 381

Για να έχουμε όσο το δυνατό μικρότερο άθροισμα, πρέπει τα ψηφία των εκατοντάδων στους δύο αριθμούς να είναι όσο γίνεται μικρότερα. Αυτό σημαίνει ότι, από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, και 6 που μας δίνονται, είναι οι 1 και 2. Δηλαδή οι αριθμοί που ψάχνουμε έχουν τη μορφή 1** και 2**. Τώρα έχουμε να επιλέξουμε ψηφία δεκάδων από τους 3, 4, 5, 6. Με την ίδια σκέψη, τα ψηφία πρέπει να είναι τα 3 και 4, οπότε οι αριθμοί μας είναι είτε οι 13* και 24* ή οι 13* και 24* . Δεν έχει και ιδιαίτερη σημασία ποιο από τα δύο ζευγάρια θα επιλέξουμε γιατί το άθροισμά τους δεν αλλάζει. Οι αριθμοί 5 και 6 που περίσσεψαν, είναι οι μονάδες και οι αριθμοί μας είναι οι 135 και 246 (ή παραλλαγές όπως 136 και 245, αλλά χωρίς διαφορά για το τελικό άθροισμα). Το άθροισμα, λοιπόν, που ψάχνουμε είναι $135+246=\ 381$.

25) Β) 24

1ος τρόπος: Ονομάζουμε α το πλήθος των αρσενικών καγκουρό και θ των θηλυκών που ήσαν στο πάρτι. Από το γεγονός ότι κάποια στιγμή χόρευαν τα $\frac{3}{4}$ των αρσενικών με τα $\frac{4}{5}$ των θηλυκών σε ζευγάρια, συμπεραίνουμε ότι $\frac{3}{4}\alpha=\frac{4}{5}\theta$ ή $15\alpha=16\theta$. Επομένως ο αριθμός $A=15\alpha=16\theta$ είναι συγχρόνως πολλαπλάσιο του και 15 και του 16. Άρα είναι πολλαπλάσιο του Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλασίου τους. Το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο όμως των 15, 16 είναι το $15\cdot16$. Επομένως ο A είναι ίσος με $15\cdot16$ ή $2\cdot15\cdot16$ ή $3\cdot15\cdot16$ κλπ. Αν $A=15\cdot16$, τότε $\alpha=16$ και $\theta=15$, δηλαδή τα καγκουρό ήταν συνολικά $15+16=31$. Οι άλλες περιπτώσεις δίνουν συνολικό αριθμό καγκουρό μεγαλύτερο του 50, που δεν ταιριάζει στις υποθέσεις. Επομένως εκείνη τη στιγμή χόρευαν $\frac{3}{4}\cdot16=12$ αρσενικά και $\frac{4}{5}\cdot15=12$ θηλυκά καγκουρό, σύνολο 24.

2ος τρόπος: Έστω Χ το πλήθος των *ζευγαριών* που χόρευαν εκείνη τη στιγμή, δηλαδή έστω ότι χόρευαν Χ αρσενικά με αντίστοιχα Χ θηλυκά καγκουρό. Αφού χόρευαν τα $\frac{3}{4}$ των αρσενικών, σημαίνει ότι όλα τα αρσενικά ήσαν $\frac{4}{3}X$ και, όμοια, όλα τα θηλυκά ήσαν $\frac{5}{4}X$. Άρα όλα μαζί τα καγκουρό στο πάρτι είναι $\frac{4}{3}X+\frac{5}{4}X=\frac{31}{12}X$. Όμως ο αριθμός αυτός πρέπει να είναι ακέραιος. Οπότε το Χ υποχρεωτικά πρέπει να είναι ένας από τους αριθμούς 12, 24, 36 και λοιπά, δηλαδή πολλαπλάσιο του 12 (για να εξασφαλίσουμε ότι ο $\frac{31}{12}X$ είναι ακέραιος). Ο $X=12$ δίνει ακέραιο, τον $\frac{31}{12}\times 12=31$, οπότε είναι πιθανή λύση. Ας εξετάσουμε τις περιπτώσεις 24, 36 και λοιπά. Παρατηρούμε ότι ο Χ δεν μπορεί να είναι 24 ή περισσότερο γιατί τότε όλα μαζί τα καγκουρό θα ήσαν $\frac{31}{12}X=\frac{31}{12}\times 24=62$ ή περισσότερα, ενώ ξέρουμε ότι είναι το πολύ 50. Άρα μόνο το Χ=12 είναι επιτρεπτό, οπότε εκείνη την ώρα χόρευαν $12+12=24$ καγκουρό. Ας κάνουμε επαλήθευση: Τα αρσενικά είναι $\frac{4}{3}\times 12=16$ και τα θηλυκά $\frac{5}{4}\times 12=15$, σύνολο $16+15=31$ που είναι ακέραιος μικρότερος του 50.

26) Δ) 1993

Όταν σβήσουμε το ψηφίο των μονάδων από τον τριψήφιο (χωρίς μηδενικά), μένει διψήφιο τέλειο τετράγωνο. Τα διψήφια τέλεια τετράγωνα είναι τα 16, 25, 36, 49, 64, και 81. Άρα ο αριθμός μας έχει την μορφή 16*, 25*, 36*, 49*, 64* ή 81* με κατάλληλο ψηφία κάθε φορά για τον *. Ας δούμε τώρα πώς συμπληρώνεται ο καθένας από αυτούς: Ο 16* γίνεται τέλειο τετράγωνο αν σβήσουμε το 1. Αλλά τέλειο τετράγωνο της μορφής 6* είναι μόνο το 64, άρα ο αριθμός είναι ο 164. Το φυλάμε και εξετάζουμε τον επόμενο, δηλαδή τον 25*. Αν σβήσουμε το 2, μένει αριθμός της μορφής 5*. Όμως δεν υπάρχει διψήφιο τέλειο τετράγωνο που ξεκινά από 5, συνεπώς ο αριθμός 25* δεν μας ενδιαφέρει. Τον πετάμε. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο θα διαπιστώσουμε ότι μας ενδιαφέρουν μόνο οι 364, 649 και 816. Το άθροισμα τους είναι 164+364+649+816 = 1993.

27) Δ) καφέ

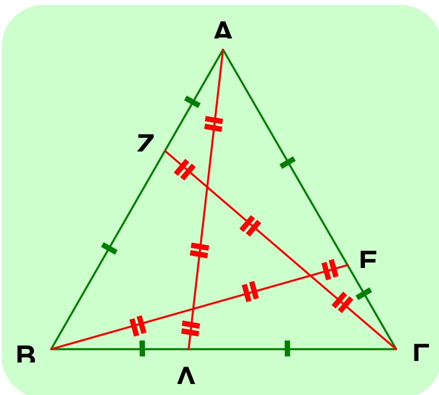
Ελέγχουμε κάθε μία από τις περιπτώσεις πράσινο, κίτρινο, καφέ για να δούμε αν μπορεί να είναι το χρώμα του δράκου. Αν το χρώμα του δράκου ήταν πράσινο, το πρώτο παιδί (που απάντησε «δεν είναι πράσινος» θα είχε μαντέψει λάθος. Το δεύτερο παιδί, που είπε «είναι ή κίτρινος ή καφέ», θα είχε μαντέψει λάθος και το παιδί που είπε «είναι κίτρινος» θα είχε και αυτό μαντέψει λάθος. Δηλαδή και οι τρεις μαντεψιές θα ήσαν λάθος. Αυτή την περίπτωση πρέπει να την αποκλείσουμε γιατί το πρόβλημα μας λέει ότι τουλάχιστον μία μαντεψιά ήταν σωστή. Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση που ο δράκος ήταν κίτρινος. Αυτή τη φορά θα διαπιστώσουμε ότι οι απαντήσεις «δεν είναι πράσινος», «είναι ή κίτρινος ή καφέ» και «είναι κίτρινος» είναι και οι τρεις σωστές. Οπότε και αυτή η περίπτωση πρέπει να αποκλεισθεί, γιατί ξέρουμε ότι τουλάχιστον μία μαντεψιά πρέπει να είναι λάθος. Μένει να εξετάσουμε την περίπτωση που ο δράκος είναι καφέ. Σε αυτή την περίπτωση η απαντήσεις «δεν είναι πράσινος» και «είναι ή κίτρινος ή καφέ» είναι σωστές ενώ η «είναι κίτρινος» είναι λάθος. Η περίπτωση αυτή είναι η μόνη αποδεκτή και ο δράκος, λοιπόν, ήταν καφέ χρώμα.

28) Δ) 4

Το άθροισμα των αριθμών 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7 είναι 28. Οπότε κάθε μία από τις δύο μικρότερες ομάδες της διαμέρισης που έκανε ο Πυθαγόρας πρέπει να έχει άθροισμα 14. Για να μετρήσουμε όλους τους δυνατούς τρόπους, εξετάζουμε εκείνο από τα δύο σύνολα της διαμέρισης του Πυθαγόρα που περιέχουν τον 7 (διαλέγουμε τον πιο μεγάλο από τους δοθέντες αριθμούς για να διευκολυνθούμε στον συλλογισμό μας). Ποιοι άλλοι αριθμοί μπορεί να βρίσκονται στο ίδιο σύνολο; Πρώτα από όλα οι άλλοι αριθμοί πρέπει να έχουν άθροισμα $14-7=7$. Η ερώτηση, λοιπόν, γίνεται *ποιοι συνδυασμοί από τους 1, 2, 3, 4, 5 και 6 έχουν άθροισμα 7;* Με λίγες δοκιμές διαπιστώνουμε ότι είναι οι $\{6,\ 1\}$, $\{5,\ 2\}$, $\{4,\ 3\}$, $\{4,\ 2,1\}$. Άρα έχουμε τέσσερις διαμερίσεις: α) την $\{7,\ 6,\ 1\}$ με τους υπόλοιπους αριθμούς στη δεύτερη ομάδα, β) την $\{7,\ 5,\ 2\}$ με τους υπόλοιπους αριθμούς στ δεύτερη ομάδα, γ) την $\{7,\ 4,\ 3\}$ με τους υπόλοιπους αριθμούς στη δεύτερη και δ) την $\{7,\ 4,\ 2,\ 1\}$ με τους υπόλοιπους αριθμούς στο δεύτερο σύνολο. Συνοψίζοντας, έχουμε 4 τρόπους.

29) Γ) 13 μέτρα

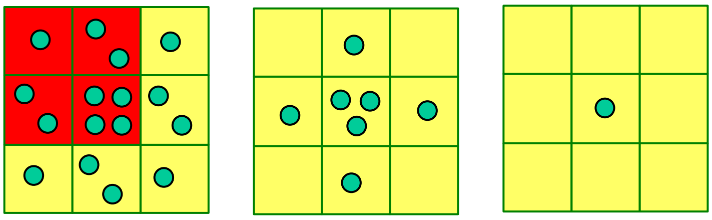
Προσθέτουμε τις περιμέτρους των τριών τριγώνων και των τεσσάρων τετράπλευρων. Θα βρούμε $20+25=45$ μέτρα. Παρατηρούμε τώρα ότι σε αυτό το άθροισμα α) όλες οι εσωτερικές πλευρές (κόκκινες στο σχήμα) αθροίζονται από δύο φορές, μία ως πλευρά τριγώνου και μία ως πλευρά τετραπλεύρου και β) οι εξωτερικές (πράσινες στο σχήμα) αθροίζονται από μία φορά. Άρα το 45 ισούται με δύο φορές το άθροισμα των ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ (οι κόκκινες) και μία φορά το άθροισμα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Όμως μας δίνεται ότι ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ =19. Άρα $2(ΑΔ+ΒΕ+ΓΖ)=45-19=26$ μέτρα.



Συμπεραίνουμε ότι $ΑΔ+ΒΕ+ΓΖ=13$ μέτρα.

30) Α) 16

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους αριθμούς στα τέσσερα 2×2 τετράγωνα (ένα τέτοιο είναι το κόκκινο στην εικόνα). Το γινόμενό των αριθμών σε κάθε τετράγωνο χωριστά είναι 2, οπότε το γινόμενο όλων μαζί είναι $2\times 2\times 2\times 2=16$. Ας προσεχθεί ότι ορισμένοι αριθμοί στο εσωτερικό του μεγάλου τετραγώνου έχουν πολλαπλασιαστεί περισσότερες από μία φορές. Συγκεκριμένα, ο κεντρικός αριθμός πολλαπλασιάστηκε 4 φορές (αφού βρίσκετα και στα τέσσερα 2×2 τετράγωνα), οι αριθμοί στις γωνίες από μία φορά ενώ οι υπόλοιποι από δύο. Στην εικόνα αριστερά έχουμε σημειώσει με κουκίδες το πλήθος των φορών που πολλαπλασιάστηκε ο κάθε αριθμός. Τώρα αρχίζουμε τις απλοποιήσεις. Σβήνουμε τους τρεις αριθμούς στην πρώτη γραμμή γιατί το γινόμενο τους κάνει 1, και δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα. Για τον ίδιο λόγο σβήνουμε τους τρεις αριθμούς στην δεύτερη και στην τρίτη γραμμή. Το γινόμενο θα παραμείνει 16, αλλά τώρα οι κουκίδες είναι όπως στην δεύτερη εικόνα. Τέλος, σβήνουμε τους τρεις αριθμούς στη μεσαία στήλη και τους τρεις στη μεσαία γραμμή γιατί, όπως πριν, δεν επηρεάζουν το γινόμενο 16. Θα μας μείνει ένας αριθμός (τρίτη εικόνα), ο κεντρικός. Άρα ο κεντρικός αριθμός είναι 16. Αν θέλουμε να δούμε ένα τετράγωνο με τις παραπάνω ιδιότητες, παρόλο που δεν το ζητά το πρόβλημα, κοιτάμε την τέταρτη εικόνα. Μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι το μοναδικό τετράγωνο με τις ιδιότητες που εξετάζουμε.

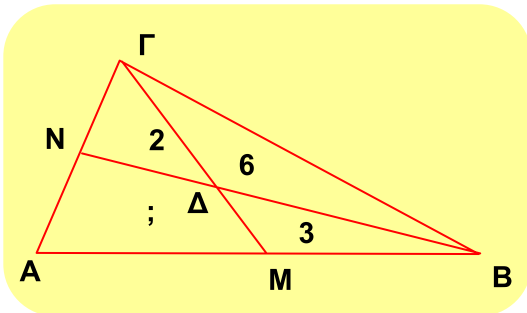


2	$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{4}$	16	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	2

Επίπεδο 4 – (Γ' Γυμνασίου και Α' Λυκείου)

1) Δ) 7

Αφού το Μ είναι το μέσον του ΑΒ, τα εμβαδά των ΑΜΓ και ΒΜΓ είναι ίσα. Από το σχήμα βλέπουμε ότι το εμβαδόν του ΒΜΓ είναι $6+3=9$, οπότε και (ΑΜΓ) = 9. Το ζητούμενο τετράπλευρο είναι $(\text{ΑΜΓ})-(\text{ΔΝΓ})=9-2\ =7$.



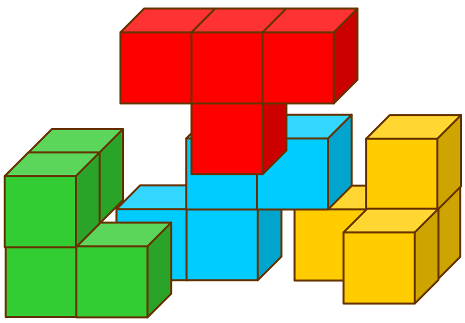
2) Δ) 9,999

Ο πρώτος και ο τελευταίος προσθετέος απλοποιούνται, οπότε δεν τους λαμβάνουμε άλλο υπόψη. Οι πράξεις για τους άλλους δύο φαίνονται δεξιά.

$$\begin{array}{r} 11{,}110 \\ -\quad 1{,}111 \\ \hline 9{,}999 \end{array}$$

3) Δ)

Η εικόνα δείχνει πώς συμπλέκονται τα κομμάτια για να συνθέσουν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



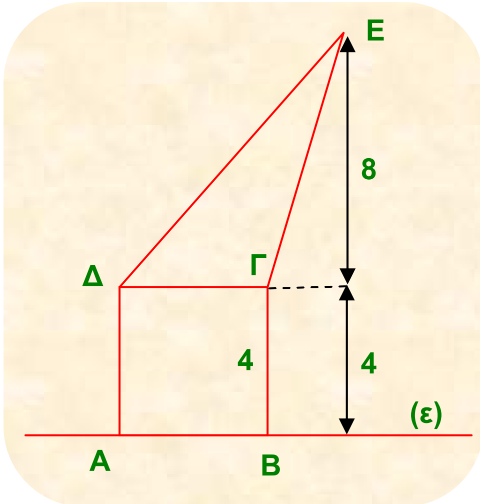
4) Ε) Το μήνυμα ήταν λανθασμένο

Δεν χρειάζεται να κάνουμε αποκρυπτογράφηση γιατί, όπως θα δούμε, το μήνυμα είναι σίγουρα λανθασμένο. Πραγματικά, η μετατροπή $2\times$(αριθμός) + 9 δίνει πάντα μονό (περιττό) αριθμό γιατί ο $2\times$(αριθμός) είναι ζυγός, οπότε αν προσθέσουμε το 9, γίνεται μονός. Από την άλλη, το τελευταίο γράμμα του μηνύματος, που ήταν 19, 31, 25, 20, περιέχει τον ζυγό αριθμό 20. Άρα κάπου έγινε ένα λάθος.

Αν θέλαμε, για δική μας περιέργεια, να διαβάσουμε τα τρία πρώτα γράμματα του μηνύματος, θα διαπιστώναμε ότι είναι ΕΛΘ.

5) Γ) 12 μέτρα

Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $4 \cdot 4 = 16$ τ.μ. οπότε το τρίγωνο, ως ίσο του, έχει εμβαδόν 16 τ.μ. Αφού η βάση του είναι 4 μέτρα, ο τύπος $\frac{1}{2} \cdot (\beta \acute{\alpha} \sigma \eta) \cdot (\acute{\upsilon} \psi o \varsigma) = 16$, δηλαδή $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (\acute{\upsilon} \psi o \varsigma) = 16$, μας δείχνει ότι το ύψος του είναι 8 μέτρα. Άρα το Δ απέχει $8 + 4 = 12$ μέτρα από την (ε).



6) Α) 0

Αφού ο αριθμός είναι *επταψήφιος* και το άθροισμα των ψηφίων του είναι 6, σημαίνει ότι κάποιο από τα ψηφία του είναι 0. Πραγματικά, αν ήσαν όλα 1 και πάνω, τότε το άθροισμά τους θα ήταν τουλάχιστον $1+1+1+1+1+1+1=7$, ενώ ξέρουμε ότι είναι 6. Τώρα, αφού κάποιο ψηφίο είναι 0, το γινόμενο των ψηφίων είναι επίσης 0.

7) Β) 12 μ.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, η υποτείνουσα του τριγώνου είναι $\sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100}$ $=10$ μέτρα. Οι πλευρές του ΚΛΜ συνδέουν τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ, οπότε καθεμία είναι ίση με το μισό της απέναντι πλευράς. Άρα οι πλευρές του ΚΛΜ είναι 3, 4 και 5, αντίστοιχα, οπότε η περίμετρός του είναι $3+4+5=12$ μέτρα.

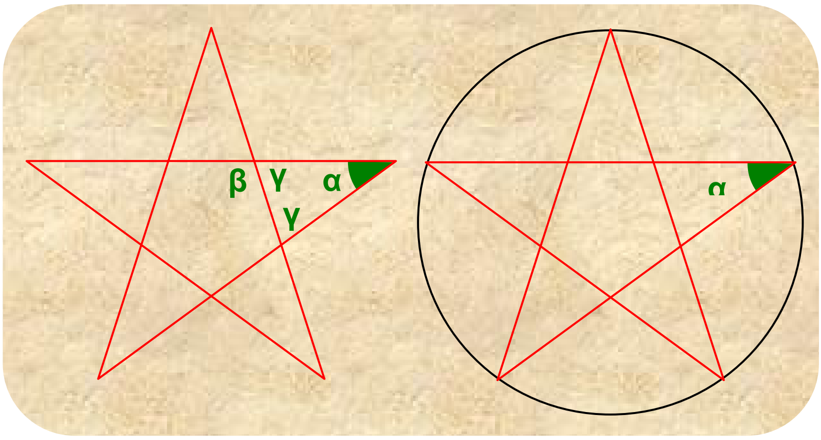
8) Ε) $8 - \frac{8}{8} + 8$

Ας υπολογίσουμε τις παραστάσεις που μας δίνονται και μετά ας ξανακάνουμε τις πράξεις με $A \neq 8$ στη θέση του 8. Στην πρώτη περίπτωση θα βρούμε $\frac{8+8-8}{8} = \frac{8}{8} = 1$ και $\frac{A+A-A}{A} = \frac{A}{A} = 1$, που είναι η ίδια απάντηση. Στις επόμενες τρεις, πάλι θα βρούμε την ίδια απάντηση, είτε με 8 είτε με $A \neq 8$. Μάλιστα δεν χρειάζεται να κάνουμε τις πράξεις με 8 αλλά τις κάνουμε απευθείας με Α. Θα βρούμε $A + \frac{A}{A} - A = A + 1 - A = 1$, $\frac{A}{A+A+A} = \frac{A}{3A} = \frac{1}{3}$ και $(A+A)^{A-A} = (2A)^0 = 1$, αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι σε κάθε μία από τις περιπτώσεις, η απάντηση είναι ανεξάρτητη του Α. Με άλλα λόγια θα βρούμε το ίδιο τελικό αποτέλεσμα, στην κάθε περίπτωση χωριστά, είτε κάνουμε τις σημειωμένες πράξεις με οκτάρια είτε με τον αριθμό Α στη θέση τους. Δεν συμβαίνει το ίδιο με την τελευταία παράσταση. Αυτή δίνει $A-\frac{A}{A}+A=A-1+A=2A-1$, η οποία εξαρτάται από το Α. Έτσι, με οκτάρι δίνει $2\times 8-1=15$ που είναι *διαφορετικό* από το $2A-1$ αν $A\neq 8$ (ισχύει $2A-1=15$ μόνο αν $A=8$).

9) Γ) 36^{o}

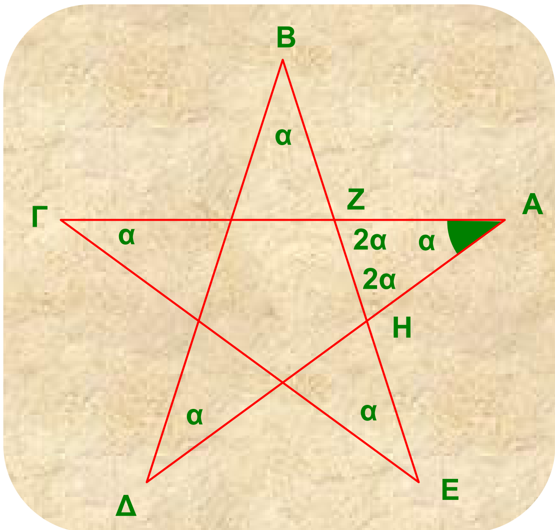
1ος τρόπος: Το άθροισμα των γωνιών κάθε ν-γωνου είναι $2\nu-4$ ορθές. Στην περίπτωση του πενταγώνου είναι $2\cdot 5-4=6$ ορθές, δηλαδή $6\cdot 90^{o}=540^{o}$. Άρα κάθε μία από τις γωνίες β του κανονικού πενταγώνου στο σχήμα, είναι $\frac{1}{5}\cdot 540^{o}=108^{o}$. Άρα $\gamma=180^{o}-108^{o}=72^{o}$.



Από το ισοσκελές τώρα τρίγωνο με γωνίες α, γ και γ, συμπεραίνουμε ότι $\alpha=180^{o}-2\gamma=180^{o}-2\cdot 72^{o}$ $=36^{o}$.

2ος τρόπος: Αν σχεδιάσουμε τον κύκλο που περιβάλει το πεντάγωνο αστέρι, παρατηρούμε ότι η γωνία α είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε τόξο ίσο με το $\frac{1}{5}$ της περιφέρειας. Επειδή οι εγγεγραμμένες γωνίες είναι το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας, η α είναι $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot 360^{o}=36^{o}$.

3ος τρόπος: Τα πέντε τρίγωνα που είναι εξωτερικά του κανονιού πενταγώνου είναι ίσα μεταξύ τους γιατί έχουν ίσες πλευρές (οι πλευρές του πενταγώνου) και ίσες τις προσκείμενες σε αυτές γωνίες (παραπληρωματικές των ίσων εσωτερικών γωνιών του πενταγώνου). Επομένως οι γωνίες Α, Β, Γ, Δ και Ε είναι ίσες μεταξύ τους, και ίσες με α. Η γωνία $\widehat{AZH}$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΓΖΕ, άρα είναι ίση με 2α. Όμοια $\widehat{AHZ}=$ 2α. Επομένως $2\alpha+2\alpha+\alpha=180^{o}$ ή $\alpha=36^{o}$.



10) Ε) 6

Καταγράφουμε όλους τους τριψήφιους αριθμούς που έχουν άθροισμα ψηφίων ίσο με 3: Αν το ψηφίο των εκατοντάδων είναι 3, υπάρχει μόνο ένας τέτοιος αριθμός, ο 300. Αν το ψηφίο των εκατοντάδων είναι 2, υπάρχουν οι 201 και 210. Τέλος, αν το ψηφίο των εκατοντάδων είναι 1, υπάρχουν οι 102, 111 και 120. Συμπεραίνουμε ότι συνολικά ο Αρχιμήδης έγραψε 6 αριθμούς, τους 300, 201, 210, 102, 111, 120.

11) Γ) 90 εκ.

Αν ονομάσουμε Τ το ύψος του τραπεζιού, Κ το ύψος του κοριτσιού και Α του αγοριού, τότε οι συνθήκες του προβλήματος γράφονται $T+A=K+100$ και $T+K=A+80$, αντίστοιχα. Αν προθέσουμε κατά μέλη τις δύο ισότητες θα βρούμε $2T+A+K = K+A+180$. Απλοποιώντας έχουμε $2T+\cancel{A}+\cancel{K} = \cancel{K}+\cancel{A}+180$ ή $2T=180$, από όπου $T=90$. Άρα το τραπέζι έχει ύψος 90 εκατοστά. Επίσης μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $A=K+10$, δηλαδή το αγόρι είναι 10 εκατοστά ψηλότερο από το κορίτσι.

12) Γ) 4

Τα μηδενικά ψηφία του γινομένου προκύπτουν από πολλαπλασιασμό των 2 και 5. Γι' αυτό τον λόγο θα τα συλλέξουμε μαζί. Έχουμε

$$2^{55}\cdot 3^4\cdot 5^{53}=(2^{53}\cdot 5^{53})\cdot 2^2\cdot 3^4=(2\cdot 5)^{53}\cdot 2^2\cdot 3^4=10^{53}\cdot 2^2\cdot 3^4$$

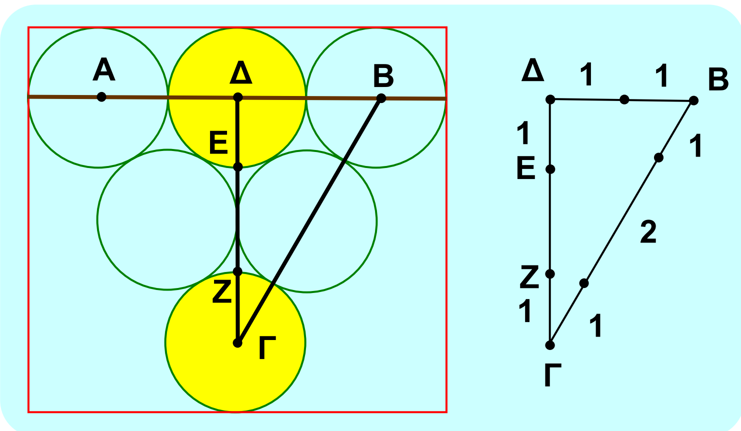
Ο παράγοντας 10^{53} μας δίνει τα μηδενικά ενώ το τελευταίο ψηφίο του $2^2\cdot 3^4$ δίνει το ζητούμενο. Αφού $2^2\cdot 3^4=4\cdot 81=324$, βλέπουμε ότι το τελευταίο ψηφίο είναι το 4.

13) Β) 12

Η υπόθεση είναι ότι το καθένα από τα δύο ζώα κέρδισε τόσες καραμέλες όσες έχασε. Σε κάθε δύο παιχνίδια που κερδίζει ο πιγκουΐνος, θα πάρε 6 καραμέλες (τρεις ανά παιχνίδι), τα οποία θα δώσει πίσω σε τρία παιχνίδια που θα χάσει (δύο ανά παιχνίδι). Άρα σε κάθε 5 παιχνίδια, ο πιγκουΐνος κερδίζει στα δύο και χάνει στα άλλα τρία. Οπότε στα $30=6\cdot 5$ παιχνίδια, θα κερδίσει στα $6\cdot 2=12$. Επαλήθευση: Στα 12 παιχνίδια θα κερδίσει $12\cdot 3=36$ καραμέλες. Στα υπόλοιπα $30-12=18$, θα χάσει $18\cdot 2=36$ καραμέλες, δηλαδή όλες όσες κέρδισε.

14) Γ) $2\sqrt{3}-2\,\mu$.

Από την οριζόντια γραμμή ΑΒ στο σχήμα, που έχει μήκος όσο 6 ακτίνες του κάθε κύκλου, συμπεραίνουμε ότι η ακτίνα του κύκλου είναι 1 μέτρο. Το μήκος που αναζητάμε είναι το ΕΖ, το οποίο βρίσκεται στο ορθογώνιο



τρίγωνο ΒΓΔ. Στο τρίγωνο αυτό έχουμε από το σχήμα ΒΔ = δύο ακτίνες = 2 μέτρα, ΒΓ= τέσσερις ακτίνες = 4 μέτρα και ΔΕ = ΓΖ= 1 μέτρο. Για διευκόλυνση, το τρίγωνο που μελετάμε σχεδιάστηκε χωριστά. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε $\Gamma\Delta^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$ οπότε $\Gamma\Delta = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Άρα $EZ = \Gamma\Delta - \Delta E - \Gamma Z = 2\sqrt{3} - 1 - 1 = 2\sqrt{3} - 2$ μέτρα.

15) Γ) 2

Αν προσθέσουμε τους 100 αριθμούς 1, 11, 111, ... , $\underbrace{111\ldots11}_{100\text{ ψηφία}}$, το τελευταίο ψηφίο προκύπτει από το άθροισμα εκατό 1, που είναι τα ψηφία των μονάδων. Αλλά $100 \times 1 = 100$, οπότε το τελευταίο ψηφίο είναι 0. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα $1+11+111+\ldots+\underbrace{111\ldots11}_{100\text{ ψηφία}}$ είναι πολλαπλάσιο του 5, και δεν αφήνει υπόλοιπο όταν διαιρεθεί με το 5. Μπορούμε, λοιπόν, να τον αγνοήσουμε. Εξετάζουμε τώρα τους αριθμούς 1×2, $1\times2\times3$, ... , $1\times2\times3\times\ldots\times101$. Παρατηρούμε ότι από τον $1\times2\times3\times4\times5$ και πέρα, είναι όλοι πολλαπλάσια *του 5* (διότι ο καθένας περιέχει τον παράγοντα 5). Συνεπώς και αυτούς τους αριθμούς μπορούμε να τους αγνοήσουμε, αφού η διαίρεση με το 5 δεν αφήνει υπόλοιπο. Μένει να εξετάσουμε τους αριθμούς $1\times2=2$, $1\times2\times3=6$ και $1\times2\times3\times4=24$. Το άθροισμά τους είναι $2+6+24=32$, του οποίου το υπόλοιπο της διαίρεσης δια 5 είναι 2.

16) Β) 12 η ώρα και 3 λεπτά

Ξέρουμε ότι τα ρολόγια του κύριου Ρολογόπουλου πάνε λάθος κατά ±2, ±3 και ±4 λεπτά, αντίστοιχα, χωρίς να ξέρουμε πόσο χάνει ή κερδίζει το καθένα. Από την ώρα που δείχνουν, δηλαδή 12 η ώρα, 12 η ώρα και 5 λεπτά και 12 η ώρα και 7 λεπτά, αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι το πιο αργό από το πιο γρήγορο ρολόι διαφέρουν κατά 7 λεπτά. Από τους αριθμούς ±2, ±3 και ±4, οι μόνοι που διαφέρουν κατά 7 είναι είτε α) το ζεύγος -4 και +3 ή β) το ζεύγος -3 και +4. Εξετάζουμε τώρα αν κάποια από τις δύο αυτές περιπτώσεις μπορεί να αποκλεισθεί και, παράλληλα, αν η άλλη είναι συμβατή με το πρόβλημα.

α) Στη περίπτωση αυτή, δηλαδή αν το αργό ρολόι (αυτό που δείχνει 12 η ώρα) πάει 4 λεπτά πίσω, σημαίνει ότι η σωστή ώρα θα ήταν 12 και 4 λεπτά. Άρα το ρολόι που δείχνει 12 και 5 θα πήγαινε λάθος κατά 1 λεπτό. Τέτοια όμως εκδοχή δεν υπάρχει (μας δίνεται ότι το ρολόι αυτό πάει κατά 2 λεπτά λάθος). Η περίπτωση αυτή, λοιπόν, πρέπει να αποκλεισθεί.

β) Στη περίπτωση που το αργό ρολόι πάει 3 λεπτά πίσω, σημαίνει ότι η σωστή ώρα θα ήταν 12 και 3 λεπτά. Αυτό ταιριάζει με τα δεδομένα του προβλήματος γιατί, πραγματικά, το δεύτερο ρολόι (που δείχνει 12 και 5 λεπτά) θα ήταν λάθος κατά 2 λεπτά και το γρήγορο κατά 4. Δεκτή, λοιπόν, αυτή η εκδοχή.

17) Δ) 19

1ος τρόπος: Αφού ο 11 είναι υπόλοιπο διαίρεσης δια N, ισχύει $N \geq 12$. Από την Ευκλείδεια διαίρεση του 144 διά N υπάρχει φυσικός κ τέτοιος ώστε $144 = N\kappa + 11$. Όμοια υπάρχει φυσικός λ τέτοιος ώστε $220 = N\lambda + 11$. Αφαιρώντας τις προηγούμενες ισότητες έχουμε $220 - 144 = N\lambda - N\kappa$ ή $76 = N(\lambda - \kappa)$. Δηλαδή ο N είναι διαιρέτης του 76. Όμως $76 = 2^2 \cdot 19$. Επομένως οι διαιρέτες του 76 που είναι μεγαλύτεροι του 11 είναι οι 19, 38 και 72. Με έλεγχο βρίσκουμε ότι μόνο ο 19 έχει τις ζητούμενες ιδιότητες (είναι $144 = 19 \cdot 7 + 11$ και $220 = 19 \cdot 11 + 11$).

2ος τρόπος: Αφού η διαίρεση του 144 δια του Ν αφήνει υπόλοιπο 11, σημαίνει ότι ο $144 - 11 = 133$ είναι πολλαπλάσιο του Ν. Όμοια ο $220 - 11 = 209$ είναι πολλαπλάσιο του Ν. Δηλαδή ο Ν είναι κοινός διαιρέτης των 133 και 209. Ερευνώντας τους διαιρέτες των δύο αριθμών, παραδείγματος χάριν με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο ή αλλιώς, θα βρούμε ότι ο μόνος κοινός διαιρέτης (πέρα από τον 1) είναι ο 19 (επαλήθευση: $133 = 7 \cdot 19$ και $209 = 11 \cdot 19$). Άρα Ν = 19.

133	209
133	76
57	76
57	19
1	19

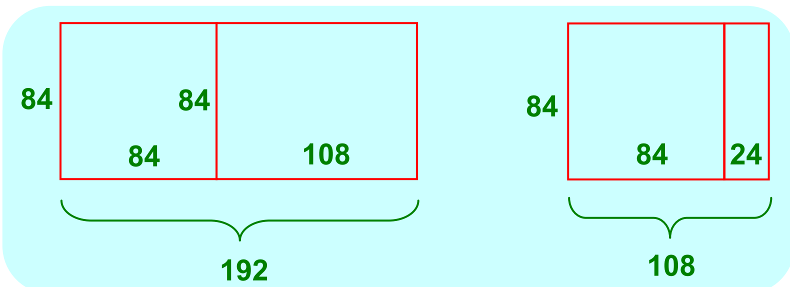
18) Β) 4

Ονομάζουμε x τον αριθμό στο μεσαίο αριστερά τετραγωνάκι. Τώρα το άθροισμα των αριθμών της πρώτης στήλης είναι $2 + x + 6 = 8 + x$. Ξέρουμε ότι η δεύτερη στήλη έχει το ίδιο άθροισμα με την πρώτη. Οι αριθμοί 4 και 3 που ήδη υπάρχουν σε αυτή την στήλη έχουν άθροισμα 7, οπότε υπολείπονται $x + 1$ για να έχει και αυτή η στήλη άθροισμα $8 + x$. Με την ίδια σκέψη, στην τρίτη στήλη το κενό τετραγωνάκι είναι το $5 + x$. Εξετάζουμε τώρα τις γραμμές για τις οποίες ξέρουμε ότι τα αθροίσματα είναι τα ίδια. Η πρώτη γραμμή έχει άθροισμα $2 + 4 + (x + 4) + 2 = x + 12$. Η τρίτη γραμμή ήδη περιέχει τους 6, $x + 1$ και 1 οπότε της λείπουν 4 για να έχει άθροισμα $x + 12$, άρα στο πράσινο τετραγωνάκι μπαίνει το 4. Αν θέλαμε να συμπληρώσουμε όλο τον πίνακα, αν και δεν μας το ζητά το πρόβλημα, θα βρίσκαμε ότι στην δεύτερη γραμμή λείπει το 6 για να έχει και αυτή η γραμμή άθροισμα $x + 12$. Από την πρώτη και την τελευταία στήλη βγάζουμε το συμπέρασμα ότι $x = 4$, και ο πίνακας συμπληρώνεται όπως ο δεξιός.

2	4	x+4	2
x	3	3	
6	x+1	1	

2	4	8	2
4	3	3	6
6	5	1	4

19) Ε) 12 mm



Η πρώτη ψαλιδιά θα είναι παράλληλη της μικρής πλευράς του 192×84 ορθογωνίου. Η μεγάλη πλευρά θα κοπεί σε ένα τμήμα μήκους 84 mm και ένα 192-84=108 mm. Θα σχηματιστεί ένα τετράγωνο διαστάσεων 84×84 και ένα ορθογώνιο διαστάσεων 84×108, όπως δείχνει η εικόνα. Μετά, το ορθογώνιο διαστάσεων 84×108 κόβεται πάλι προς την μικρή του πλευρά για να δώσει ένα τετράγωνο διαστάσεων 84×84 και ένα ορθογώνιο 84×24. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, θα εμφανίζεται κάθε φορά ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο. Οι διαστάσεις των ορθογωνίων είναι διαδοχικά 60×24, 36×24, 12×24. Σε αυτό το στάδιο η κοπή του ορθογωνίου (η κοπή γίνεται ακριβώς στη μέση) παράγει δύο τετράγωνα διαστάσεων 12×12 και η διαδικασία σταματάει. Τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι 12 mm.

20) Δ) Γκου, Ρο, Κα

Σύμφωνα με τον τέταρτο, είτε ο Γκου είτε ο Ρο θα βγει δεύτερος. Ας εξετάσουμε την πρώτη εκδοχή. Τότε σύμφωνα με αυτό που λέει ο δεύτερος, θα κερδίσει ο Ρο. Δηλαδή η σειρά τους θα είναι

1: Ρο, 2: Γκου

Αυτό όμως αντίκειται σε αυτά που λέει ο πρώτος.

Οπότε ο Γκου δεν θα βγει δεύτερος, άρα θα έχουμε την εκδοχή ότι ο Ρο θα βγει δεύτερος, δηλαδή

1: ------ , 2: Ρο, 3: -----

Τώρα, θα μπορούσε να ήταν ο Γκου τρίτος; Με άλλα λόγια, θα μπορούσε να ισχύει

1: ------ , 2: Ρο, 3: Γκου;

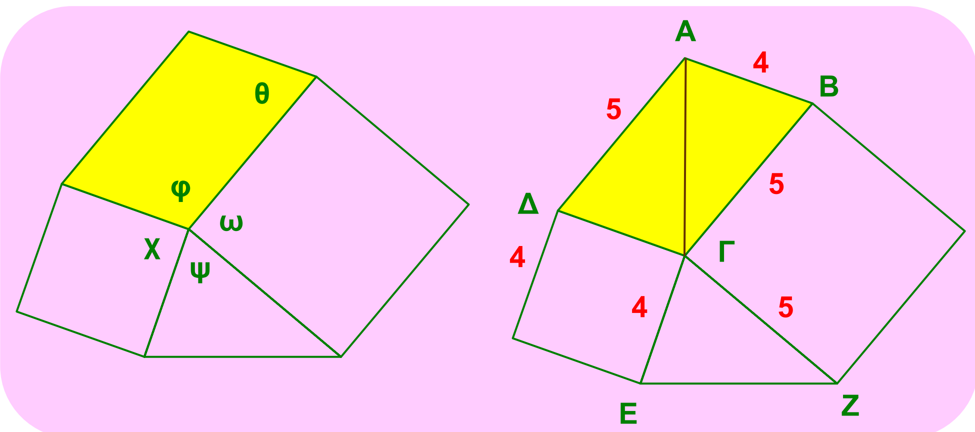
Αν ναι, τότε θα ήταν πρώτος ο Κα, που δεν συμφωνεί με αυτά που προέβλεψε ο τρίτος. Άρα ο Γκου θα έρθει πρώτος και η σειρά θα είναι

1: Γκου , 2: Ρο, 3: Κα

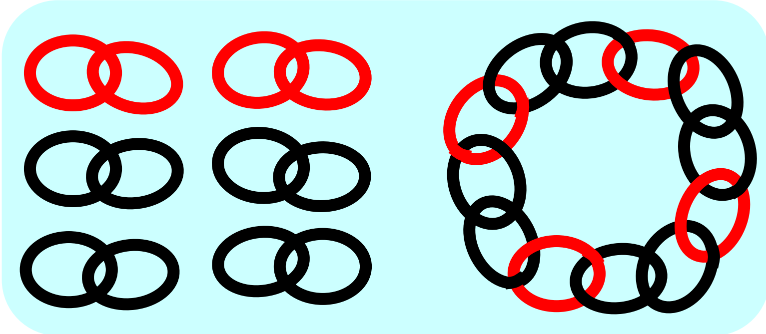
Η κατάταξη αυτή είναι συμβατή με όσα είπαν οι τέσσερις φίλοι.

21) Β) 16 cm^2

Επειδή οι γωνίες χ και ω είναι ορθές, έχουμε $\varphi + \psi = 360^\circ - \chi - \omega = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$, δηλαδή οι φ και ω είναι παραπληρωματικές. Φέρνουμε την ΑΓ, η οποία χωρίζει το κίτρινο παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα μέρη. Συγκρίνουμε τώρα το τρίγωνο ΑΒΓ με το ΓΕΖ. Έχουν δύο πλευρές αντίστοιχα ίσες, τις $AB = \Gamma E = 4$ cm και $B\Gamma = \Gamma Z = 5$ cm. Επίσης έχουν ίσες τις περιεχόμενες γωνίες $\angle B$ και $\angle E\Gamma Z$ γιατί και οι δύο είναι παραπληρωματικές της φ. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα. Συμπεραίνουμε ότι το κίτρινο εμβαδόν είναι $(AB\Gamma\Delta) = 2(AB\Gamma) = 2\ (\Gamma EZ) = 2 \cdot 8 = 16$ cm^2.



22) Α) 4



Μπορεί ο σιδεράς να κόψει 4 κρίκους από δύο ζεύγη (κόκκινα στην εικόνα). Αυτά τα τέσσερα κομμάτια τα χρησιμοποιεί για να ενώσει τα υπόλοιπα. Με λιγότερα από 4 κοψίματα, δηλαδή με 3 ή λιγότερα, δεν γίνεται να ενώσει τους κρίκους σε ενιαία αλυσίδα. Ένας τρόπος να το διαπιστώσουμε είναι να παρατηρήσουμε ότι αν κόψει 3 κρίκους, σημαίνει ότι τουλάχιστον 3 από τα 6 αρχικά ζεύγη θα μείνουν απείραχτα. Αν αυτά τοποθετηθούν σε κύκλο, υπάρχουν 4 τουλάχιστον τέσσερα ενδιάμεσα σημεία που πρέπει να ενωθούν, πράγμα που δεν γίνεται με 3 ή λιγότερους κρίκους.

23) Γ) 10

1ος τρόπος: Υπάρχουν πολλοί τρόποι να μαζέψει 80 πόντους η ομάδα σε 38 παιχνίδια, αλλά εμείς αναζητάμε τον συνδυασμό με τις περισσότερες ήττες. Παρατηρούμε ότι για κάθε 3 ισοπαλίες που θα μπορούσε να έχει η ομάδα, ο συνδυασμός «μία νίκη και δύο ήττες» έχει ακριβώς τους ίδιους πόντους σε ισάριθμους αγώνες αλλά περισσότερες ήττες. Άρα ο συνδυασμός «μία νίκη και δύο ήττες» είναι ευνοϊκότερος για τη λύση μας. Συμπεραίνουμε ότι η ομάδα με τις περισσότερες ήττες έχει το πολύ δύο ισοπαλίες (γιατί αν είχε τρεις, θα τις αντικαθιστούσε με «μία νίκη και δύο ήττες». Εξετάζουμε τώρα χωριστά τις περιπτώσεις μηδέν, μία ή δύο ισοπαλίες: Αν η ομάδα είχε μηδέν ισοπαλίες τότε τους 80 πόντους θα τους μάζευε (μόνο) από νίκες (αφού οι ήττες δεν κερδίζουν πόντους). Όμως αυτή η περίπτωση αποκλείεται γιατί το 80 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, ενώ κερδίζει 3 πόντους από κάθε νίκη. Επίσης αποκλείεται η περίπτωση της μίας ισοπαλίας γιατί τότε θα έπρεπε να μαζέψει 79 πόντους από νίκες, αλλά το 79 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Τελικά, η μόνη πιθανή εκδοχή είναι οι δύο ισοπαλίες, που σημαίνει ότι έχει $78=3\cdot 26$ πόντους από 26 νίκες. Οι ήττες είναι $38-26-2=10$ (αφαιρέσαμε από τους 38 αγώνες τις 26 νίκες και 2 ισοπαλίες).

2ος τρόπος: Μας ενδιαφέρει η ομάδα να έκανε όσο το δυνατόν περισσότερες ήττες. Δηλαδή οι αγώνες στους οποίους νίκησε ή ήρθε ισόπαλη να είναι όσο το δυνατόν λιγότεροι. Αφού οι νίκες δίνουν περισσότερους πόντους, οι αγώνες θα μειώνονται όταν αυξάνονται οι νίκες. Είναι $80=26\cdot 3=2$. Δηλαδή με 26 νίκες και 2 ισοπαλίες μαζεύονται οι 80 πόντοι. Περισσότερες νίκες θα έδιναν πάνω από 80 πόντους ενώ λιγότερες θα αντικατασταθούν από ισοπαλίες που σημαίνει μεγαλύτερο πλήθος αγώνων. Επομένως το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος αγώνων που μπορεί να έχασε η ομάδα είναι $38-26-2=10$.

24) Γ) είναι αδύνατο να είναι αναμμένοι όλοι οι γλόμποι

Δεν ισχύει το (Α) γιατί θα μπορούσε, για παράδειγμα, ο Θαλής να πατήσει 10 φορές τον διακόπτη του ίδιου γλόμπου και ο φίλος του 10 φορές ενός άλλου, πάντα του ίδιου. Σε αυτή την περίπτωση οι γλόμποι στο τέλος θα είναι όλοι σβηστοί, δηλαδή δεν είναι σωστό το (Α). Δεν ισχύει το (Β), γιατί αν ο Θαλής και ο φίλος του ασχοληθούν μόνο με τους 4 γλόμπους αλλά αφήσουν απείρακτο τον πέμπτο, τότε αυτός θα παραμείνει σβηστός. Με άλλα λόγια, υπάρχει περίπτωση να μην είναι στο τέλος όλοι αναμμένοι. Δεν ισχύει το (Δ) γιατί αν ο Θαλής ανάψει έναν γλόμπο και μετά δεν τον πειράξει ξανά ούτε αυτός ούτε ο φίλος του, τότε ο γλόμπος αυτός θα μείνει αναμμένος. Άρα δεν είναι αλήθεια ότι όλοι οι γλόμποι στο τέλος θα είναι σβηστοί. Θα δούμε ότι το (Γ) είναι αλήθεια, οπότε αυτόματα δεν είναι σωστό το (Ε). Για να δούμε ότι το (Γ) αληθεύει θα δούμε ότι σε κάθε στάδιο, όταν δηλαδή και ο Θαλής και ο φίλος του πατήσουν και οι δύο από έναν διακόπτη, τότε το πλήθος των αναμένων γλόμπων θα είναι 0 ή 2 ή 4 ενώ αποκλείεται να είναι 1 ή 3 ή 5. Πράγματι, κάθε φορά που ο Θαλής πατάει έναν διακόπτη, το πλήθος των αναμένων γλόμπων αλλάζει κατά ± 1. Ισχύει το ίδιο και για την περίπτωση του φίλου του. Έτσι το πλήθος των αναμένων γλόμπων όταν πατήσουν και οι δύο από έναν διακόπτη, είτε θα αυξηθεί κατά 2 ή θα μείνει αμετάβλητο σε πλήθος ή θα μειωθεί κατά 2. Πάντως αλλάζει κατά άρτιο αριθμό. Όπως και να είναι, οι αναμμένοι γλόμποι από 0 αρχικά, θα γίνουν 0 ή 2 ή 4 αργότερα και θα παραμείνει άρτιο πλήθος. Δηλαδή σε κάθε στάδιο θα είναι 0 ή 2 ή 4, ενώ ποτέ δεν θα γίνουν 1 ή 3 ή 5. Ειδικά, αποκλείεται να είναι αναμμένοι και οι 5 όταν ολοκληρωθεί η διαδικασία.

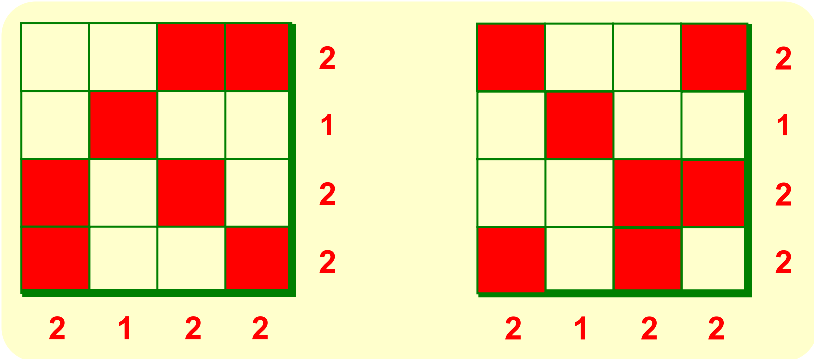
25) Β) 3

Στην ισότητα $20 = m^m(m^n - n)$ δεν μπορεί να είναι $m = 1$ γιατί θα είχαμε τότε $20 = 1^1 \times (1^n - n) = 1 - n$ που δίνει n αρνητικό, ενώ ξέρουμε ότι είναι φυσικός. Επίσης δεν μπορεί να είναι $m \geq 3$ γιατί τότε $20 = m^m(m^n - n) \geq 3^3 \cdot 1 = 27$, που δεν ισχύει. Άρα υποχρεωτικά $m = 2$. Είναι τότε $20 = m^m(m^n - n) = 2^2(2^n - n) = 4(2^n - n)$ οπότε $2^n - n = 5$. Με έλεγχο μικρών τιμών του n βλέπουμε ότι $n \neq 0$, 1 ή 2 αλλά το $n = 3$ ικανοποιεί την εξίσωση αφού $2^3 - 3 = 5$. Για επαλήθευση, έχουμε $20 = 4 \times 5 = 2^2(2^3 - 3)$. Ας σημειωθεί ότι κανένα άλλο n δεν ικανοποιεί την $2^n - n = 5$ γιατί μπορούμε να δείξουμε ότι $5 = 2^3 - 3 < 2^4 - 4 < 2^5 - 5 < \ldots$ (η διαφορά δύο διαδοχικών όρων είναι θετική καθώς $\left[2^{n+1} - (n+1)\right] - (2^n - n) = 2^n - 1 \geq 2 - 1 > 0$).

26) Δ)

Θα δούμε ότι οι περιπτώσεις (Α), (Β), (Γ) και (Ε) αποκλείεται να είναι το αποτέλεσμα της διαδικασίας που περιγράφουμε. Πραγματικά, (Α) αφού η πρώτη γραμμή έχει και τα 4 τετραγωνάκια βαμμένα, αποκλείεται το 0 που αναγράφεται στην πρώτη γραμμή. Άρα αυτή η περίπτωση δεν προκύπτει από την διαδικασία. (Β) Αν κοιτάξουμε την στήλη με τους αριθμούς 1, 2, 1, 3 παρατηρούμε ότι το άθροισμά τους είναι 1+2+1+3 = 7. Αυτό σημαίνει ότι συνολικά είναι βαμμένα κόκκινα 7 τετραγωνάκια. Όμως το άθροισμα των αριθμών 2, 2, 3, 1 στη γραμμή είναι 2+2+3+1=8. Το γεγονός ότι βρήκαμε διαφορετικό πλήθος από βαμμένα τετραγωνάκια, σημαίνει ότι αυτή η περίπτωση αποκλείεται. (Γ) Αφού δύο γραμμές έχουν από 0 κόκκινα τετραγωνάκια, τότε κάθε στήλη έχει το πολύ 2 βαμμένα τετραγωνάκια. Όμως βλέπουμε στήλη σημειωμένη με 3, οπότε αποκλείεται και αυτή η περίπτωση. (Ε) Τα κόκκινα τετραγωνάκια στις γραμμές με τα 3, μπαίνουν στη δεύτερη, τρίτη και τέταρτη στήλη (το κενό τετραγωνάκι σε αυτές τις γραμμές είναι το πρώτο, λόγω του 0 στην πρώτη στήλη). Έτσι η τρίτη στήλη θα είχε τουλάχιστον δύο βαμμένα τετραγωνάκια, αλλά στο κάτω περιθώριο γράφει 1. Άρα και αυτή η περίπτωση αποκλείεται. Τώρα, παρόλο που δεν το ζητά η άσκηση, πρέπει να εξετάσουμε κατά πόσο η περίπτωση (Δ) είναι εφικτή.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να βαφτούν τα τετραγωνάκια ώστε να ταιριάζουν στον πίνακα. Δύο τέτοιοι είναι οι διπλανοί.



27) Δ) $2 < K \leq 3$

Είναι $K = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} \geq \sqrt{6+0} > \sqrt{4} = 2$. Αυτό δείχνει την αριστερή ανισότητα. Για την δεξιά μεγαλώνουμε το τελευταίο 6 σε 9 και με χρήση της $\sqrt{9} = 3$ έχουμε

$$K = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} \leq \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}}} = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+3}}} = \sqrt{6+\sqrt{6+3}} = \sqrt{6+3} = 3$$

όπως θέλαμε.

28) Γ) 45^2

Τα γινόμενα που εξετάζουμε τοποθετημένα σε μορφή πίνακα, είναι τα

1×1	1×2	1×3	1×4	1×5	1×6	1×7	1×8	1×9
2×1	2×2	2×3	2×4	2×5	2×6	2×7	2×8	2×9
				. . .				
9×1	9×2	9×3	9×4	9×5	9×6	9×7	9×8	9×9

Το άθροισμα των αριθμών ανά γραμμή, βγάζοντας κοινούς παράγοντες, είναι αντίστοιχα

$$1\times(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 1\times45$$

$$2\times(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 2\times45$$

. . .

$$9\times(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 9\times45$$

Προσθέτοντας τώρα τα αθροίσματα που βρήκαμε, βγάζοντας το 45 ως κοινό παράγοντα, θα βρούμε $(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\times 45 = 45\times 45 = 45^2$.

29) Β) της 5ης στήλης

Πρώτα από όλα προσδιορίζουμε πόσες στήλες και πόσες γραμμές έχει ο πίνακας. Από τους αριθμούς που δίνονται στην τελευταία γραμμή συμπεραίνουμε ότι οι στήλες είναι $120-105=15$. Από τον τρόπο τοποθέτησης των αριθμών (ένας στη πρώτη γραμμή, δύο στην δεύτερη, τρεις στην τρίτη και λοιπά) οι γραμμές είναι όσες οι στήλες, δηλαδή 15.

Θέλουμε την στήλη με το μεγαλύτερο άθροισμα. Παρατηρούμε ότι κάθε στήλη με την επόμενή της έχουν τις εξής ομοιότητες και διαφορές: α) η επόμενη περιέχει έναν αριθμό λιγότερο και β) οι αριθμοί της επόμενης στήλης, εκτός από τον πρώτο, είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτεροι από τον αμέσως αριστερά τους. Με αυτό κατά νου, και *χωρίς να κάνουμε τις προσθέσεις των αριθμών σε κάθε στήλη*, συμπεραίνουμε ότι η δεύτερη στήλη έχει μεγαλύτερο άθροισμα από την πρώτη διότι στην πρόσθεση της δεύτερης α) χάνουμε τον προσθετέο 1 της πρώτης στήλης και β) αυξάνει το άθροισμα κατά 14 μονάδες, μία για κάθε αριθμό στην στήλη αυτή. Άρα η δεύτερη στήλη έχει μεγαλύτερο άθροισμα από την πρώτη. Όμοια η τρίτη έχει μεγαλύτερο άθροισμα από την δεύτερη διότι α) χάνουμε τον προσθετέο 3 της δεύτερης στήλης και β) αυξάνει το άθροισμα κατά 13 μονάδες, μία για κάθε αριθμό στην στήλη αυτή. Όμοια σκεπτόμενοι μπορούμε να κάνουμε σύγκριση της τρίτης και τέταρτης στήλης καθώς και της τέταρτης και πέμπτης. Και στις δύο περιπτώσεις, το άθροισμα αυξάνει. Η πρώτη φορά που μειώνεται το άθροισμα είναι από την πέμπτη στήλη στην έκτη γιατί χάνουμε 15 μονάδες και κερδίζουμε μόνο 10, οπότε συνολικά το άθροισμα μειώνεται. Από κει και πέρα, κάθε επόμενη στήλη έχει μικρότερο άθροισμα γιατί χάνουμε έναν «μεγάλο αριθμό» (σίγουρα μεγαλύτερο από το 15 στην αρχή της πέμπτης στήλης) ενώ κερδίζουμε «μικρό αριθμό» (σίγουρα λιγότερες μονάδες από τις μονάδες που κερδίσαμε μεταξύ πέμπτης και έκτης στήλης). Άρα το μεγαλύτερο άθροισμα το έχει η 5η στήλη.

1						
2	3					
4	5	6				
7	8	9	10			
11	12	13	14	15		
...	...	...	...	...	...	
106	107	108	109	110	...	120

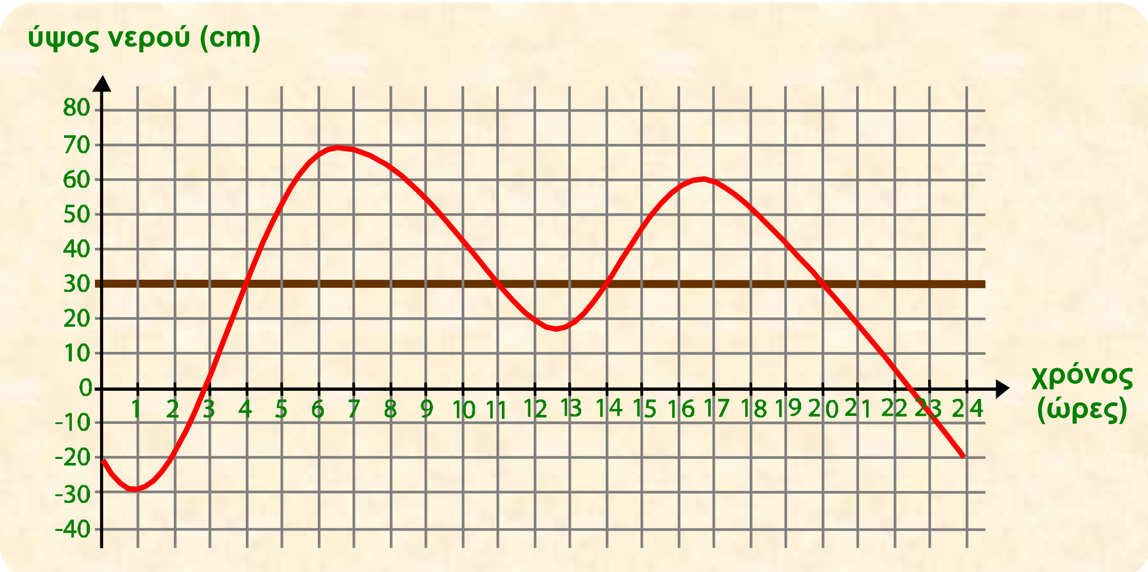
30) Β) 3

Πρώτα από όλα παρατηρούμε ότι κανένας από τους δύο δεν έχει το 1 γιατί θα μάντευε αμέσως, από τη πρώτη φορά που μίλησε, ότι ο άλλος έχει το 2. Κανείς τους όμως δεν το μάντεψε όταν πρωτομίλησε. Εξετάζουμε τώρα αν η Άννα θα μπορούσε να έχει το 2. Σε αυτή την περίπτωση συμπεραίνει, αρχικά, ότι ο Βασίλης έχει είτε το 1 είτε το 3 αλλά δεν μπορεί σε αυτό το στάδιο να είναι σίγουρη για πιο από τα δύο. Όμως, την δεύτερη φορά που μίλησε θα έβγαζε το συμπέρασμα ότι ο Βασίλης έχει το 3 (αφού δεν έχει το 1). Ωστόσο η Άννα είπε ότι ο αριθμός του Βασίλη είναι διαιρέτης του 20, ενώ ο 3 δεν είναι. Συνεπώς η Άννα δεν έχει το 2. Συνεχίζουμε εξετάζοντας αν η Άννα θα μπορούσε να έχει το 3. Στην περίπτωση αυτή ο Βασίλης θα είχε το 2 ή το 4. Αν ο Βασίλης είχε το 2, θα καταλάβαινε αμέσως ότι η Άννα έχει το 3 γιατί ήξερε ότι δεν έχει το 1. Το γεγονός ότι δεν το σκέφτηκε αυτό ο Βασίλης σημαίνει ότι η Άννα θα έβγαζε (όπως και έκανε) το συμπέρασμα ότι ο Βασίλης έχει το 4, το οποίο άλλωστε διαιρεί το 20. Η περίπτωση αυτή, δηλαδή ότι η Άννα είχε το 3 και έβγαλε το συμπέρασμα ότι ο Βασίλης έχει το 4, είναι δεκτή. Μένει να εξετάσουμε αν υπάρχει και άλλη εκδοχή. Αν η Άννα είχε το 4, το μόνο που θα μπορούσε να συμπεράνει είναι ότι ο Βασίλης έχει το 3 ή το 5. Όπως και οι δύο περιπτώσεις, 4 η Άννα και 3 ο Βασίλης ή 4 η Άννα και 5 ο Βασίλης, οδηγούν σε ακριβώς τον ίδιο διάλογο οπότε δεν μπορούμε να τους διακρίνουμε. Το ίδιο αν η Άννα είχε το 5 ή οποιονδήποτε μεγαλύτερο.

Επίπεδο 5 – (Β' και Γ' Λυκείου)

1) Ε) 13

Στο διάγραμμα φαίνεται η γραμμή όπου το ύψος της επιφάνειας του νερού είναι 30 cm. Στον οριζόντιο άξονα βλέπουμε τις ώρες που το ύψος είναι πάνω από 30 cm. Είναι από τις 4 έως τις 11 και ξανά από τις 14 έως τις 20, δηλαδή για 7 ώρες την πρώτη φορά και 6 την δεύτερη. Σύνολο 13 ώρες.



2) Β) $\sqrt{2}$

Έχουμε $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{4\cdot 2}}=\sqrt[3]{\sqrt{8}}=\sqrt{\sqrt[3]{8}}=\sqrt{2}$. Άλλος τρόπος να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα είναι $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\left(2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2^{\frac{3}{6}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

3) Γ) 5

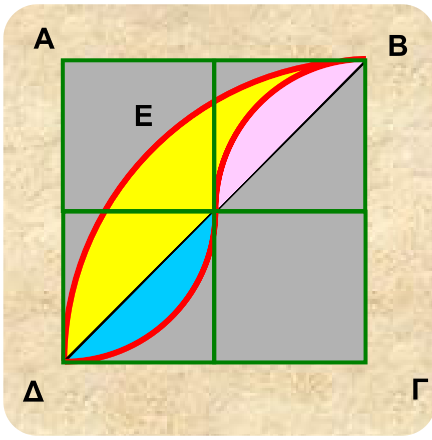
Έστω x ο μεσαίος αριθμός. Αφού το γινόμενο των τριών πρώτων αριθμών είναι 30 και οι δύο από αυτούς είναι 2 και x, ο άλλος (ο δεύτερος) είναι ο $\frac{15}{x}$. Ανάλογα, από το γινόμενο 360 των τριών τελευταίων συμπεραίνουμε ότι ο τέταρτος είναι $\frac{30}{x}$. Οι τρεις μεσαίοι έχουν γινόμενο 90, οπότε $\frac{15}{x}\cdot x\cdot\frac{30}{x}=90$. Λύνοντας την εξίσωση θα βρούμε $x=5$. Για επαλήθευση, γράφουμε τον πλήρη πίνακα όταν $x=5$, και παρατηρούμε ότι τα γινόμενα είναι όπως τα δίνει το πρόβλημα.

2	$\frac{15}{x}$	x	$\frac{30}{x}$	12

2	3	5	6	12

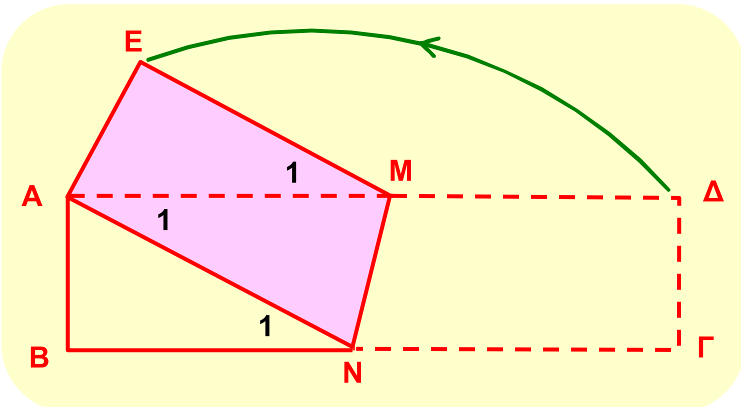
4) Β) $\pi-2$

Το γαλάζιο χωρίο είναι ίσο με το ροζ στο σχήμα δεξιά. Μεταφέρουμε το γαλάζιο χωρίο στο ροζ, οπότε το σχήμα γίνεται ευκολότερο. Το ζητούμενο χωρίο είναι η διαφορά του τεταρτοκυκλίου ΓΒΕΔ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ. Άρα ισούται $\frac{1}{4}\pi\cdot2^2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=\pi-2$ τ.μ.



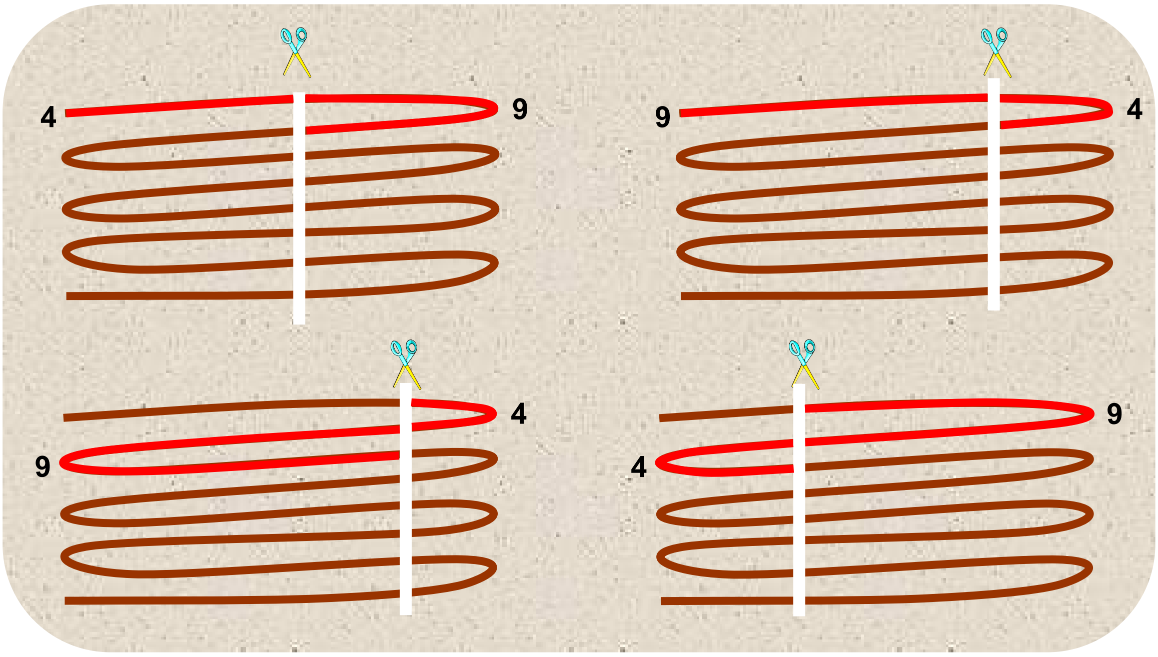
5) Γ) 32 cm^2

Τα τρίγωνα ΑΕΜ και ΑΒΝ είναι ίσα ως ορθογώνια με $ΑΕ=ΓΔ=ΑΒ$ και, λόγω παραλληλίας των ΑΝ, ΕΜ , έχουμε $\angle M_1=\angle A_1=\angle N_1$. Έτσι το ΑΝΜΕ είναι ισεμβαδικό με το ΑΒΝΜ. Επίσης το ΑΝΜΕ ισούται με το ΝΓΔΜ από το οποίο προέκυψε με την δίπλωση. Άρα τα ισεμβαδικά ΑΒΝΜ, ΝΓΔΜ έχουν, το καθένα, εμβαδόν όσο το μισό του αρχικού ορθογωνίου παραλληλογράμμου, δηλαδή $\frac{1}{2}\cdot4\cdot16=32$ cm^2. Συμπεραίνουμε ότι και το ίσο τους ΑΝΜΕ έχει εμβαδόν 32 cm^2.



6) Γ) 72 cm

Η ψαλιδιά χωρίζει τον σπάγκο σε 9 κομμάτια. Τα τέσσερα δεξιά έχουν το ίδιο μήκος ενώ αριστερά έχουμε δύο με κοινό μήκος και άλλα τρία με επίσης κοινό μήκος. Στην εικόνα βλέπουμε τις τέσσερις πιθανές ψαλιδιές με βάση τα μήκη 4 cm και 9 cm δύο κομματιών. Εξετάζουμε χωριστά τις περιπτώσεις αυτές. Στην πρώτη εκδοχή έχουμε δύο κομμάτια των 4 cm αριστερά, τέσσερα των 9 cm δεξιά και εμφανίζονται άλλα τρία αριστερά, μήκους 8 cm το καθένα. Άρα το αρχικό μήκος του σπάγκου είναι $2\times 4+4\times 9+3\times 8=68$ cm. Όμοια σκεπτόμενοι, το αρχικό μήκος του σπάγκου στη δεύτερη εκδοχή είναι $2\times 9+4\times 4+3\times 18=88$ cm. Στην τρίτη είναι $2\times 4{,}5+4\times 4+3\times 9=52$ cm και στην τέταρτη $2\times 2+4\times 9+3\times 4=52$ cm. Συνεπώς από τις τιμές που δίνονται, εκείνη που *δεν* μπορεί να είναι το αρχικό μήκος του σπάγκου είναι η 72 cm.



7) Δ) 11

Η ανισότητα γράφεται $(n^2)^{100}<(5^3)^{100}$ που ισοδυναμεί με την $n^2<5^3=125$, αφού οι $n^2, 5^3$ είναι θετικοί. Έπεται ότι $n=11$ αφού $11^2=121<125<144=12^2$.

8) Δ) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Βρίσκουμε την $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ σε κάθε μία από τις περιπτώσεις, χωριστά, και ελέγχουμε κατά πόσο ισχύει η ισότητα $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)}$. Για την (Α) όπου $f(x)=\dfrac{2}{x}$ έχουμε $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x$ ενώ $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x}{2}$, οπότε οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες. Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε για την (Β) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{x+1}$ ότι $\dfrac{1}{f(x)}=x+1$, για την (Γ) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1+x$ ότι $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x}{x+1}$, για την (Δ) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$ ότι $f(x)=x$ και για την (Ε) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+x$ ότι $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x}{x^2+1}$. Άρα ισχύει η ισότητα $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)}$ για την (Δ) και μόνον αυτή.

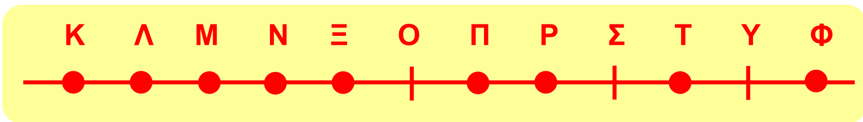
9) Ε) $x<-8$

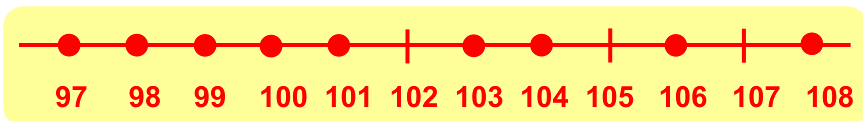
Το σημείο που πρέπει να προσεχθεί είναι ότι η άσκηση ρωτά ποια από τις απαντήσεις (Α) έως (Ε) είναι σίγουρα σωστή από την υπόθεση $x^3<64<x^2$. Θα δούμε ότι είναι η (Ε). Ας σημειωθεί ότι για να δείξουμε ότι κάποιο συμπέρασμα *δεν έπεται* από την υπόθεση, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα αριθμού που ικανοποιεί την υπόθεση αλλά όχι το συμπέρασμα.

Το (Α) δεν έπεται διότι ο $x=-9$ ικανοποιεί την υπόθεση $x^3<64<x^2$ (επαλήθευση: $x^3=(-9)^3=-729<64<81=(-9)^2=x^2$) αλλά όχι την $0<x<64$. Το ίδιο ακριβώς παράδειγμα, δηλαδή το $x=-9$, δείχνει ότι δεν ικανοποιείται καμία από τις (Β), (Γ) και (Δ). Ας δούμε τώρα την λύση της $x^3<64<x^2$. Πρέπει να συναληθεύουν οι $x^3<64$ και $64<x^2$. Η πρώτη γράφεται $x^3<4^3$. Αφού η συνάρτηση $y=x^3$ είναι γνήσια αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι $x<4$ ή αλλιώς $x\in(-\infty,4)$ (*). Η δεύτερη γράφεται $(x-8)(x+8)>0$, οπότε $x\in(-\infty,-8)\cup(8,\infty)$ (**). Οι (*) και (**) συναληθεύουν στο $x\in(-\infty,-8)$ οπότε ισχύει $x<-8$.

10) Ε) 108

Δίνουμε ονόματα Κ, Λ και λοιπά, στους αριθμούς του άξονα, αρχίζοντας από τον πιο μικρό από τους σημειωμένους. Η απόσταση από έναν φυσικό στο σχήμα μέχρι τον επόμενο είναι, βέβαια, φυσικός. Δεν μπορεί να είναι 2 ή περισσότερο γιατί από τον Κ έως τον Φ είναι 11 διαστήματα μεταξύ τους. Άρα ο Φ θα διέφερε από τον Κ κατά 22 τουλάχιστον ενώ από τον 93 έως τον 112 είναι 19 μονάδες. Άρα οι αριθμοί Κ, Λ, έως Φ διαφέρουν κατά 1 (είναι διαδοχικοί φυσικοί). Τώρα, ένας από τους διαδοχικούς Κ, Λ, Μ και Ν είναι πολλαπλάσιο του 4 και θα εντοπίσουμε ποιος. Αν ήταν ο Κ, τότε θα ήταν και Ξ από τους σημειωμένους με • αλλά κανένας άλλος (επισημαίνουμε ότι και ο Σ θα ήταν πολλαπλάσιο του 4, αλλά δεν είναι σημειωμένος). Δηλαδή μόνον δύο από τους αριθμούς μας θα ήσαν πολλαπλάσια του 4, ενώ ξέρουμε ότι είναι τρεις. Άρα ο Κ δεν είναι πολλαπλάσιο του 4. Αν ήταν ο Λ πολλαπλάσιο του 4 τότε θα ήταν και ο Τ, αλλά κανείς άλλος. Άρα ούτε ο Λ είναι πολλαπλάσιο του 4. Όμοια βλέπουμε ότι ούτε ο Μ είναι κατάλληλος γιατί μαζί του πάει μόνον ο Π. Άρα μένει ο Ν, που μαζί με τους Ρ και Φ συμπληρώνουν την τριάδα των πολλαπλασίων του 4. Αφού $K\geq 94$ έχουμε ότι ο ικανοποιεί $N=K+3\geq 97$. Επίσης, αφού $\Phi\leq 111$, έχουμε $N=\Phi-8\leq 111-8=103$, που σημαίνει ότι $97\leq N\leq 103$. Αλλά πολλαπλάσιο του 4 με αυτούς τους περιορισμούς είναι μόνον ο 100. Άρα $N=100$, οπότε ο μεγαλύτερος από τους σημειωμένους αριθμούς είναι ο $\Phi=N+8=108$. Για έλεγχο, σχεδιάζουμε τους αριθμούς μας στον άξονα, αρχίζοντας από τον $N=100$. Οι αριθμοί μας είναι οι 97, 98, 99, 100, 101, 103, 104, 106 και 108, όπου σημειώσαμε με κόκκινο τα πολλαπλάσια του 4.





11) Α) 240

Διψήφιος αριθμός που είναι δύναμη του 5 είναι μόνο ο $5^2=25$ (η επόμενη δύναμη του 5 είναι ο $5^3=125$ που είναι τριψήφιος). Διψήφιες δυνάμεις του 2 είναι οι $2^4=16$, $2^5=32$ και $2^6=64$. Το άθροισμα των (τεσσάρων) ψηφίων των ηλικιών είναι είτε 2+5+1+6 =14, ή 2+5+3+2=12 ή 2+5+6+4=17. Από αυτούς είναι περιττός μόνον ο τελευταίος. Οπότε οι ηλικίες είναι 25 και 64, αντίστοιχα. Το γινόμενο των ψηφίων είναι $2\times5\times6\times4=240$.

12) Ε) 70

Τα άτομα που *δεν* επισκέφθηκαν το Αρχαιολογικό Μουσείο ήσαν $100-90=10$. Όμοια, αυτοί που *δεν* επισκέφθηκαν το Βυζαντινό Μουσείο ήσαν 10 και αυτοί που *δεν* επισκέφθηκαν το Λαογραφικό Μουσείο ήσαν επίσης 10. Συμπεραίνουμε ότι το πολύ $10+10+10$ άτομα δεν επισκέφθηκαν κάποιο από τα αξιοθέατα. Άρα οι υπόλοιποι $100-30=70$, και ίσως περισσότεροι, επισκέφθηκαν και τα τρία αξιοθέατα.

13) Α) $(-\infty,\,0)\cup(3,\,+\infty)$

Οι ποσότητες x και $x-3$ μέσα στα απόλυτα αλλάζουν πρόσημο στα $x=0$ και $x=3$, οπότε για να λύσουμε την ανίσωση διακρίνουμε περιπτώσεις $x<0,\ 0\le x<3$ και $3\le x$.

Με τον περιορισμό $x<0$, η ανίσωση γίνεται $-x-(x-3)>3$. Λύνοντας θα βρούμε $x<0$. Λαμβάνοντας υπόψη και τον περιορισμό, είναι δεκτές όλες οι τιμές $x<0$.

Με τον περιορισμό $0\le x<3$, η ανίσωση γίνεται $x-(x-3)>3$, ισοδύναμα $3>3$, που δεν ισχύει. Άρα δεν υπάρχουν x με $0\le x<3$ που ικανοποιούν την ανίσωση.

Με τον περιορισμό $3\le x$, η ανίσωση γίνεται $x+(x-3)>3$. Λύνοντας θα βρούμε $x>3$. Λαμβάνοντας υπόψη και τον περιορισμό, είναι δεκτές όλες οι τιμές $x>3$.

Συνοψίζοντας, οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα x με $x<0$ ή με $x>3$. Ως σύνολο, γράφονται $(-\infty,\,0)\cup(3,\,+\infty)$.

14) Γ) Τα κορίτσια είναι διπλάσια από τα αγόρια

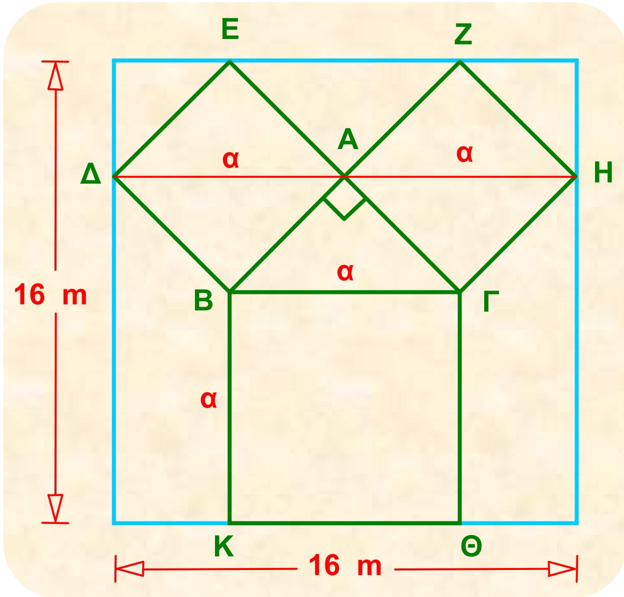
1ος τρόπος: Ο μέσος όρος των βιβλίων των κοριτσιών είναι 0,2 πάνω από τον μέσο όρο της τάξης, ενώ των αγοριών είναι 0,4 κάτω. Αφού το 0,4 είναι διπλάσιο του 0,2 σημαίνει ότι υπάρχουν δύο κορίτσια για κάθε αγόρι, ώστε να ισοσταθμίζεται το πλήθος των βιβλίων. Με άλλα λόγια, συνολικά τα κορίτσια είναι διπλάσια από τα αγόρια.

2ος τρόπος: Αν A το πλήθος των αγοριών και K το πλήθος των κοριτσιών της τάξης, θα βγάλουμε σχέση μεταξύ των A και K μετρώντας το πλήθος των βιβλίων με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Όλα μαζί τα παιδιά είναι $A+K$, οπότε το πλήθος των βιβλίων είναι $4(A+K)$. Επίσης, τα βιβλία των αγοριών είναι 3,6Α και των κοριτσιών 4,2Κ, οπότε συνολικά τα βιβλία είναι $3{,}6A+4{,}2A$.

Εξισώνοντας το πλήθος των βιβλίων από τις δύο μορφές που βρήκαμε, έχουμε $4(A+K)=3{,}6A+4{,}2K$ ή $0{,}4A=0{,}2K$. Αυτή γράφεται $4A=2K$, οπότε $2A=K$. Η τελευταία λέει ότι το πλήθος Κ των κοριτσιών είναι 2Α, δηλαδή διπλάσιο από το πλήθος των αγοριών.

15) Γ) 144 m^2

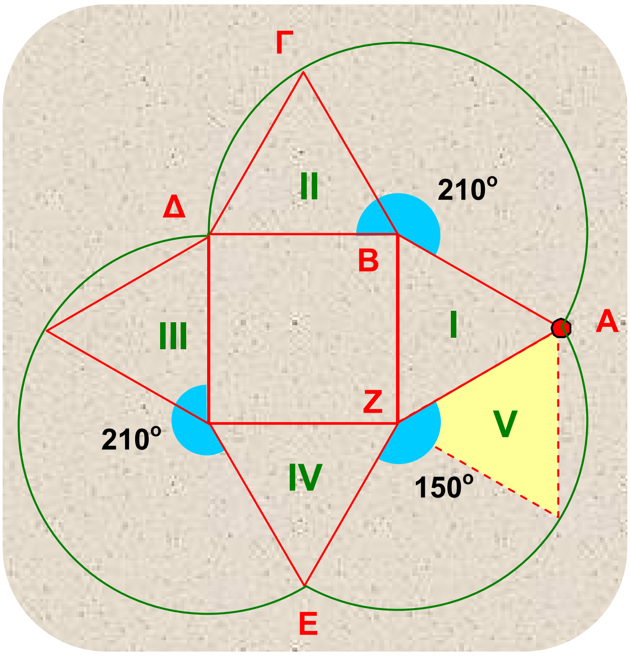


Αν ονομάσουμε α την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τότε οι διαγώνιες των δύο μικρών τετραγώνων είναι επίσης α, όπως και η πλευρά του μεγάλου τετραγώνου. Από το σχήμα βλέπουμε ότι $2\alpha=\Delta H=EK=16$ μέτρα, οπότε $\alpha=8$ μέτρα. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $AB^2+A\Gamma^2=B\Gamma^2=\alpha^2=64$, οπότε $AB^2=A\Gamma^2=32$. Το ζητούμενο εμβαδόν αποτελείται α) από το μεγάλο τετράγωνο εμβαδού $\alpha^2=64$, β) από τα δύο μικρά τετράγωνα, το καθένα εμβαδού $AB^2=32$ και γ) το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εμβαδού $\frac{1}{2}AB^2=16$. Το συνολικό εμβαδόν είναι $64+32+32+16=144\ m^2$. (Για τον υπολογισμό θα γλυτώναμε λίγο χρόνο αν παρατηρούσαμε ότι από το Πυθαγόρειο Θεώρημα τα δύο μικρά ορθογώνια έχουν άθροισμα εμβαδών όσο το μεγάλο τετράγωνο. Επίσης, το τρίγωνο είναι το $\frac{1}{4}$ του μεγάλου τετραγώνου, οπότε όλα μαζί είναι $2+\frac{1}{4}$ φορές το μεγάλο τετράγωνο. Άρα όλα μαζί είναι $\left(2+\frac{1}{4}\right)\cdot 64=144\ m^2$, όπως πριν).

16) Δ) 28 cm

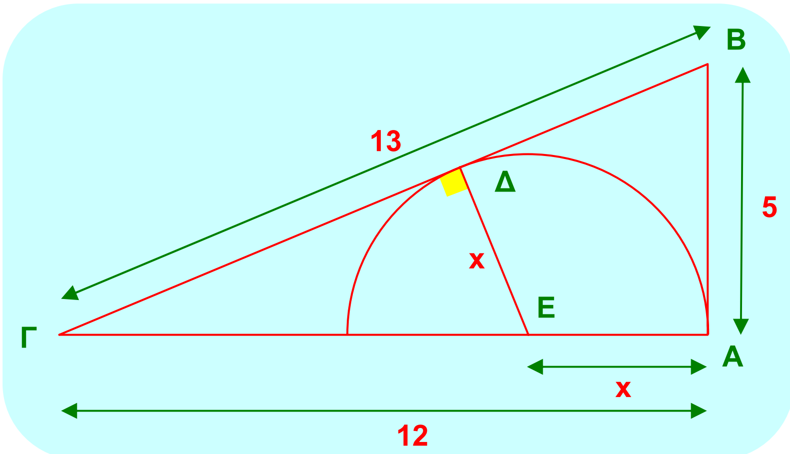
Εξετάζουμε πότε μεγαλώνει περισσότερο η μύτη του Πινόκιο: αν πρώτα πει αλήθεια και μετά ψέματα ή το ανάποδο. Αν x το μήκος της μύτης του κάποια στιγμή τότε μία αλήθεια πρώτα και ένα ψέμα μετά κάνουν την μύτη του μήκος $2(x-2)=2x-4$ ενώ ψέματα πρώτα και αλήθεια μετά την κάνουν $2x-2$. Επειδή $2x-2>2x-4$, σημαίνει ότι η μύτη του μεγαλώνει περισσότερο όταν πρώτα πει ψέματα και μετά αλήθεια. Αφού ο Πινόκιο είπε δύο φορές ψέματα και δύο αλήθεια, αποκτά την μεγαλύτερη δυνατή μύτη αν πει, με την εξής σειρά, Ψέματα-Ψέματα-Αλήθεια-Αλήθεια. Τότε η μύτη θα γίνει $8\to16\to32\to30\to28$ cm.

17) Β) $\frac{19\pi}{6}$



Καθώς περιστρέφεται το τρίγωνο από την αρχική θέση Ι μέχρι την ΙΙ, η κορυφή Α θα καταλήξει στην θέση Δ. Κατά την διαδρομή αυτή θα διαγράψει τόξο σε κύκλο ακτίνας 1 (πράσινη γραμμή στο σχήμα). Η γωνία περιστροφής είναι 210° διότι $\widehat{AB\Gamma} = 360^\circ - \widehat{\Delta BZ} - \widehat{ZBA} = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 210^\circ$. Η περιστροφή του τριγώνου από την θέση ΙΙ στην ΙΙΙ αφήνει αμετακίνητο το Δ. Η περιστροφή από την θέση ΙΙΙ στην ΙV φέρνει το Δ στο Ε κατά μήκος τόξου, όπως πριν, 210°. Τέλος, το τρίγωνο περιστρέφεται από την θέση ΙV στην V, οπότε το σημείο Ε επιστρέφει για πρώτη φορά στην αρχική του θέση Α. Η γωνία περιστροφής είναι $\widehat{EZA} = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 150^\circ$. Η συνολική περιστροφή είναι κατά γωνία $210^\circ + 210^\circ + 150^\circ = 570^\circ$. Άρα το μήκος που διαγράφει είναι $\frac{570}{360}$ περιφέρειας ακτίνας 1, δηλαδή είναι $2\pi \cdot 1 \cdot \frac{570}{360} = \frac{19\pi}{6}$.

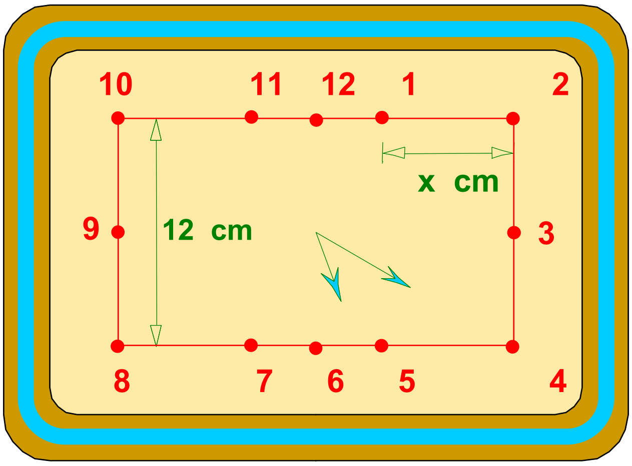
18) Β) $\frac{10}{3}$

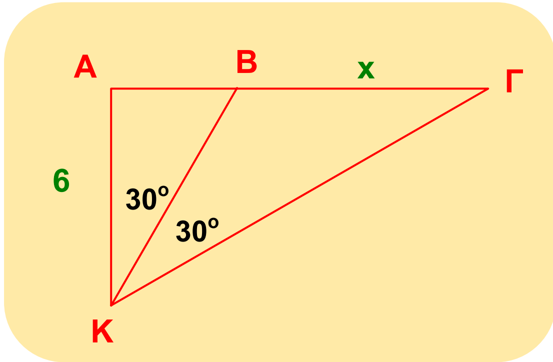


Ονομάζουμε Ε το κέντρο του ημικυκλίου, Δ το σημείο επαφής με την ΒΓ και x την ακτίνα του. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ είναι όμοια γιατί έχουν κοινή γωνία την $\hat{\Gamma}$. Επομένως οι πλευρές τους είναι ανάλογες, ειδικότερα $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{E\Gamma}$ ή $\frac{5}{x} = \frac{13}{12-x}$ ή $5(12-x) = 13x$ ή $60 - 5x = 13x$ ή $18x = 60$ ή $x = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}$.

19) Γ) $4\sqrt{3}$

Ονομάζουμε Κ το κέντρο του κύκλου, Α το σημείο όπου υπάρχει το 12 στο ρολόι, Β το σημείο του 1 και Γ του 2. Επειδή ο λεπτοδείκτης στρίβει κατά 360° σε 12 ώρες, σημαίνει ότι κάθε ώρα προχωρά κατά 30°.



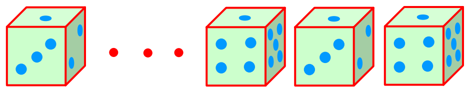


Δηλαδή η γωνία $\angle ΑΚΒ$ είναι 30° και η $\angle ΑΚΓ$ είναι 60°. Η απόσταση ΚΑ είναι όση η απόσταση από το 9 μέχρι το 10 στην εικόνα του ρολογιού, δηλαδή $\frac{1}{2}\cdot 12 = 6$ cm. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΑΓ έχουμε αντίστοιχα $ΑΒ = ΚΑ \cdot εφ30^\circ = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ και $ΑΓ = ΚΑ\cdot εφ60^\circ = 6\sqrt{3}$ cm.

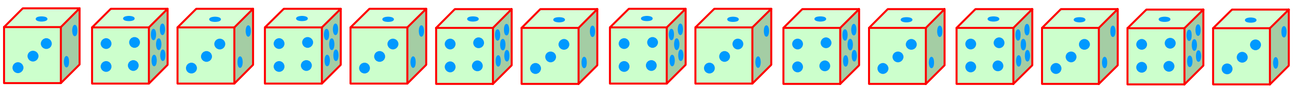
Άρα $ΒΓ = ΑΓ - ΑΒ = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm.

20) Ε) κατασκευή με άθροισμα 220 είναι αδύνατη

Εξετάζουμε πρώτα πόσα μπορεί να είναι τα ζάρια: Έστω Ν το πλήθος τους, θεωρώντας ότι υπάρχει κατασκευή με τις παραπάνω προδιαγραφές. Τότε το άθροισμα των αριθμών στις τέσσερις εξωτερικές μακρόστενες πλευρές είναι 14Ν διότι κάθε ζάρι προσθέτει $7+7=14$ στο συνολικό άθροισμα. Μένουν οι αριθμοί στα δύο πλάγια. Αν τους αγνοήσουμε προς στιγμήν, πρέπει να έχουμε $14Ν < 220$ (το άθροισμα είναι 220 αν λάβουμε υπόψη και τα δύο πλάγια). Άρα $Ν = 15$ διότι $14\cdot 15 = 210$ ενώ $14\cdot 16 = 224 > 220$). Αφού τα ζάρια είναι 15, τότε τα δύο πλαϊνά πρέπει να έχουν άθροισμα $220 - 14\cdot 15 = 220 - 210 = 10$. Με μία απρόσεκτη σκέψη θα έλεγε κανείς ότι στα πλάγια εμφανίζεται το 5, και η εικόνα είναι όπως φαίνεται δεξιά.



Τα 2 που εμφανίζονται είναι η απέναντι πλευρά του 5, σε κανονικό ζάρι. Τα πράγματα όμως δεν είναι ακριβώς έτσι: Επειδή τα ζάρια είναι περιττού πλήθους (15) η σωστή εικόνα είναι



οπότε το συνολικό άθροισμα είναι 210 (για τα μακρόστενα τμήματα της κατασκευής) συν $5+2=7$ για τα πλαινά. Δηλαδή $210+7=217$, πάντως όχι 220. Συνεπώς δεν υπάρχει τέτοια κατασκευή.

21) Β) 2

Έστω Α το πλήθος των αρνητικών αριθμών που μας δίνονται και Θ των θετικών (οι υπόλοιποι μέχρι το 20 είναι 0). Το γινόμενο δύο αριθμών είναι αρνητικό μόνο αν ο ένας είναι αρνητικός και ο άλλος θετικός. Συνεπώς τέτοια γινόμενα έχουμε ακριβώς $A \times \Theta$. Μας δίνεται ότι ακριβώς 77 γινόμενα είναι αρνητικά. Όμως υπάρχουν μόνο δύο τρόποι (χωρίς να λάβουμε υπόψη τη σειρά των παραγόντων) να γράψουμε τον 77 ως γινόμενο δύο φυσικών, συγκεκριμένα $77 = 1 \cdot 77 = 7 \cdot 11$. Από αυτούς δεν μας ενδιαφέρει ο $1 \cdot 77$ διότι ο ένας παράγοντας είναι μεγαλύτερος από το πλήθος 20 όλων των αριθμών μας. Άρα έχουμε μόνο μία εκδοχή, την $77 = 7 \cdot 11$. Συνεπώς έχουμε είτε 7 αρνητικούς και 11 θετικούς αριθμούς, ή το ανάποδο. Πάντως, συνολικά οι θετικοί και αρνητικοί είναι 7+11=18. Άρα $20 - 18 = 2$ αριθμοί από τους δοσμένους, είναι ίσοι με 0.

22) Γ) $81 < N \leq 243$

Έστω N ο αριθμός και έστω ν το πλήθος των ψηφίων του. Η προσθήκη ενός 1 στην αρχή του, ουσιαστικά σημαίνει ότι ο αριθμός γίνεται $10^{\nu} + N$ (Αν κανείς δεν το βλέπει αυτό αμέσως, ας κάνουμε ένα παράδειγμα: Ας πούμε ότι ο αριθμός μας ήταν ο τριψήφιος 452. Τότε η προσθήκη ενός 1 στην αρχή τον μετατρέπει στον 1452, που είναι $10^3 + 452$). Από την υπόθεση, η προσθήκη του 1 τον πολλαπλασίασε επί 9. Άρα ισχύει η ισότητα $10^{\nu} + N = 9N$, ισοδύναμα $10^{\nu} = 8N$. Ποιοι όμως είναι οι ν και N; Παρατηρούμε ότι το 8N είναι πολλαπλάσιο του 8, οπότε και ο ίσος του 10^{ν} θα είναι πολλαπλάσιο του 8. Ο 10^{ν} είναι διαδοχικά 1, 10, 100, 1000 και λοιπά. Από αυτούς οι 1, 10 και 100 δεν είναι πολλαπλάσια του 8. Το μικρότερο πολλαπλάσιο είναι ο $1000 = 8 \cdot 125$. Άρα ο αριθμός μας είναι ο τριψήφιος 125. Επαλήθευση: Η προσθήκη του 1 στην αρχή τον μετατρέπει σε 1125 και, πραγματικά, $1125 = 9 \cdot 125$. Συμπεραίνουμε ότι από τις απαντήσεις που δόθηκαν, η μόνη που ταιριάζει είναι η (Γ) $81 < N \leq 243$.

23) Ε) 11

Θα μπορούσαμε να ελέγξουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς από τριάδες επιλεγμένες από τους αριθμούς 2, 3, 4, 5 και 6 στο αριστερό μέλος της $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \delta^2 + \varepsilon^2$ για να εντοπίσουμε εκείνον που δίνει την ισότητα. Ο τρόπος αυτός, αν και θα οδηγήσει σε απάντηση, είναι χρονοβόρος γιατί οι συνδυασμοί είναι πολλοί (120). Αναζητάμε μέθοδο να περιορίσουμε το άσκοπο ψάξιμο.

Πρώτα από όλα παρατηρούμε ότι οι 5 και 6 δεν μπορεί να είναι από την ίδια πλευρά της ισότητας γιατί οι υπόλοιποι είναι μικροί για να φτάσουν το άθροισμα $5^2 + 6^2$. Με άλλα λόγια, ο 5 είναι από την μία πλευρά της ισότητας και ο 6 από την άλλη. Οι δοκιμές τώρα είναι λιγότερες αλλά πάλι πολλές. Ένας τρόπος να τις μειώσουμε δραστικά είναι *να εξετάσουμε μόνο τα ψηφία των μονάδων*, δηλαδή τα τελευταία ψηφία των $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$ και $6^2 = 36$. Θέλουμε τώρα να εντοπίσουμε τρία από αυτά που έχουν άθροισμα τόσες μονάδες όσες το άθροισμα των άλλων δύο. Λαμβάνοντας υπόψη την πληροφορία ότι α) οι 5 και 6 είναι σε διαφορετικές πλευρές, και β) τα τελευταία ψηφία είναι τα 4, 9, 6 , 5 και 6, εύκολα βρίσκουμε ότι μόνο οι συνδυασμοί 4, 5, 6 από την μία και 6, 9 από την άλλη έχουν αθροίσματα με ίδιο τελευταίο ψηφίο ($4 + 5 + 6 = 15$, $6 + 9 = 15$). Αφού εντοπίσαμε πώς περίπου πρέπει να χωρίσουμε τους αριθμούς, λίγες δοκιμές δίνουν την ισότητα $2^2+4^2+5^2=45=3^2+6^2$ και καμία άλλη. Έτσι $\alpha+\beta+\gamma=2+4+5=11$.

24) Δ) 113

Έστω ότι κάναμε Μ φορές την πράξη της πρόσθεσης του 8 στον αριθμητή και $N-M$ φορές την πράξη της πρόσθεσης του 7 στον παρονομαστή (η σειρά δεν έχει σημασία). Το πρόβλημα είναι να βρούμε το μικρότερο δυνατό Ν. Με αυτές τις πράξεις, στο τέλος το κλάσμα θα γίνει $\frac{7+8M}{8+7(N-M)}$.

Μας δίνεται ότι το τελικό κλάσμα είναι ίσο με $\frac{7}{8}$, οπότε $\frac{7+8M}{8+7(N-M)}=\frac{7}{8}$. Απλοποιώντας τις παραστάσεις και συλλέγοντας ομοειδείς όρους θα καταλήξουμε στην ισότητα $113M=49N$ (*). Επειδή ο 113 είναι πρώτος αριθμός και είναι παράγοντας του αριστερού μέλους, θα είναι και του δεξιού. Με άλλα λόγια η ανάλυση του $49N=7^2N$ σε πρώτους παράγοντες πρέπει να εμπεριέχει τον 113. Συμπεραίνουμε ότι ο 113 πρέπει να είναι πρώτος παράγοντας του Ν, δηλαδή ο Ν είναι πολλαπλάσιο του 113. Το πιο μικρό πολλαπλάσιο του 113 είναι, φυσικά, ο ίδιος ο 113 οπότε δοκιμάζουμε αν $N=113$ (πιο μικρός δεν γίνεται). Βάζοντας την τιμή αυτή στην (*) βρίσκουμε $M=49$, δηλαδή το περίεργο κομπιουτεράκι έκανε 49 προσθήκες του 8 και $113-49=64$ προσθήκες του 7. Επαλήθευση: $\frac{7+49\cdot 8}{8+64\cdot 7}=\frac{7(1+7\cdot 8)}{8(1+8\cdot 7)}=\frac{7}{8}$. Άρα το κομπιουτεράκι έκανε 113 φορές τις πράξεις.

25) Α) 10

Το άθροισμα διαδοχικών αριθμών από το 1 έως το n δίνεται από τον τύπο $\frac{1}{2}n(n+1)$. Με δοκιμές βλέπουμε ότι τέτοιες παραστάσεις με τιμή μικρότερη από 220 είναι για είναι για $n=1$ έως και τον 20 και καμία άλλη. (Έλεγχος για τον μεγαλύτερο: $\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 21=210<220$ ενώ $\frac{1}{2}\cdot 21\cdot 22=231>220$). Για τον $n=20$ το άθροισμα των αριθμών $1+2+\ldots+20$ είναι 210 οπότε λείπουν 10 για να γίνει 220. Άρα έχουμε μία λύση, με διπλομετρημένο τον 10. Καμία άλλη εκδοχή δεν ταιριάζει στο πρόβλημα γιατί το άθροισμά τους είναι το πολύ $1+2+\ldots+19=\frac{1}{2}\cdot 19\cdot 20=190$. Από αυτόν θα έλλειπαν τουλάχιστον $220-190=30$ μονάδες. Αλλά οι αριθμοί από τον 30 ή περισσότερο δεν συγκαταλέγονται στους 1 έως 19, οπότε δεν μπορεί να διπλομετρήθηκαν.

26) Δ) 16

1ος τρόπος: Η παράσταση γράφεται

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1=x_1(x_2+x_4)+x_3(x_2+x_4)=(x_1+x_3)(x_2+x_4).$$

Οπότε είναι πολλαπλάσιο του 3 ακριβώς όταν τουλάχιστον ένας από τους παράγοντες είναι πολλαπλάσιο του 3. Οι δυνατοί συνδυασμοί ζευγών από τους 1, 2, 3, 4 που δίνουν πολλαπλάσια του 3 είναι τα $1+2,\ 2+1,\ 2+4$ και $4+2$. Κάθε ένα από αυτά τα τέσσερα ζεύγη συμπληρώνεται από τους άλλους δύο αριθμούς (ας τους ονομάσουμε α και β) με δύο τρόπους, τον $\alpha+\beta$ και τον $\beta+\alpha$. Άρα έχουμε συνολικά $4\cdot 4=16$ τρόπους.

2ος τρόπος: Ό ένας από τους $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ είναι ο 3, οπότε όσοι όροι τον περιέχουν είναι ήδη πολλαπλάσια του 3 και μπορούμε να τους αγνοήσουμε. Ας υποθέσουμε ότι ο $x_1=3$ (όμοια για τις άλλες περιπτώσεις). Αγνοώντας τους δύο όρους $x_1x_2,\ x_4x_1$ που τον περιέχουν, μένει να εξετάσουμε πότε είναι πολλαπλάσιο του 3 η παράσταση $x_2x_3+x_3x_4=x_3(x_2+x_4)$ η οποία διαμορφώνεται από τους 1, 2 και 4. Ειδικότερα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 3 ο (x_2+x_4) διότι ο x_3 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Τέτοιες περιπτώσεις είναι τέσσερις, οι $1+2,\ 2+1,\ 2+4$ και $4+2$. Έχουμε άλλους τέσσερις για κάθε μία από τις περιπτώσεις $x_2=3,\ x_3=3$ και $x_4=3$, σύνολο 16 περιπτώσεις.

27) Δ) 2012

Οι παράλληλες της $y=x$ έχουν την ίδια κλίση με αυτήν, άρα είναι την μορφής $y=x+c$ (το c αλλάζει από ευθεία σε διαφορετική ευθεία). Η τομή μίας $y=x+c$ με την $y=x^2$ ικανοποιεί $x+c=x^2$, ισοδύναμα $x^2-x-c=0$. Αν έχει λύσεις τις x_1, x_2 (οι οποίες εξαρτώνται από το c) τότε από τους τύπους του Vieta είναι $x_1+x_2=1$ (η τιμή αυτή είναι, βέβαια, ανεξάρτητη του c). Άρα το άθροισμα των τετμημένων των σημείων τομής κάθε ευθείας χωριστά είναι 1. Για τις 2012 ευθείες το άθροισμα των τετμημένων των σημείων τομής είναι 2012.

28) Β) 3

Αν συνεχίσουμε για λίγο την ακολουθία των αριθμών θα διαπιστώσουμε ότι αποτελείται από αριθμούς 0, +1 και -1. Οπότε αναμένουμε να είναι περιοδική καθώς, μόλις λάβει δύο διαδοχικές τιμές που τις έχει ξαναπάρει, τότε θα αρχίσει να επαναλαμβάνεται (διότι χρησιμοποιούμε τον ίδιο κανόνα για τα επόμενα στοιχεία). Συγκεκριμένα, οι όροι μέχρι να δούμε ότι επαναλαμβάνεται το μοτίβο είναι στους a_{13} και a_{14}. Συγκεκριμένα, έχουμε $a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=0,\ a_4=1,\ a_5=-1,$ $a_6=0,\ a_7=-1,\ a_8=-1,\ a_9=0,\ a_{10}=-1,\ a_{11}=1,\ a_{12}=0, a_{13}=1,\ a_{14}=1$. Σε αυτό το στάδιο αντιλαμβανόμαστε ότι $a_{15}=a_{13}-a_{14}=a_1-a_2=a_3$ και όμοια $a_{16}=a_{14}+a_{15}=a_2+a_3=a_4$ και λοιπά. Με άλλα λόγια το μοτίβο των 12 πρώτων όρων, δηλαδή το $1,\ 1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0, -1,\ -1,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0$ επαναλαμβάνεται συνεχώς. Το άθροισμα αυτών των όρων είναι $1+1+0+1+(-1)+0+(-1)+(-1)+0+(-1)+1+0=0$. Οπότε το άθροισμα των 100 πρώτων όρων είναι α) 0 από τους πρώτους 96 όρους καθώς το 96 είναι οκτώ περιοδικές δωδεκάδες με άθροισμα 0 η κάθε μία, και β) τέσσερις ακόμη όρους στο τέλος, τους 1, 1, 0, 1, που έχουν άθροισμα 3. Συνεπώς οι 100 πρώτοι όροι έχουν άθροισμα 3.

29) Α) 23

Το άθροισμα $1+2+\ldots+17$ των αριθμών που δίνονται είναι $\frac{1}{2}\cdot 17\cdot 18=153$. Άρα οι 15 που έμειναν μετά την επιλογή των Χ, Υ από τον Διόφαντο έχουν άθροισμα $153-X-Y$. Μας δίνεται ότι ο αριθμός αυτός ισούται με ΧΥ, Δηλαδή $153-X-Y=XY$, ισοδύναμα $X+Y+XY=153$ με Χ, Υ από το σύνολο $\{1, 2, 3, \ldots, 17\}$. Ένας τρόπος να βρούμε τους Χ και Υ είναι να γράψουμε την εξίσωση που βρήκαμε στη μορφή $(1+X)(1+Y)=154$. Το $154=2\cdot 7\cdot 11$ ως γινόμενο δύο παραγόντων γράφεται ως $1\cdot 154, 2\cdot 77, 7\cdot 22$ και $11\cdot 14$. Η μόνη από αυτές τις επιλογές που ταιριάζει στον περιορισμό $1\le X\le 17, 1\le Y\le 17$ είναι η $(1+X)(1+Y)=154=11\cdot 14$ άρα $1+X=11,\ 1+Y=14$ (ή ανάποδα), οπότε $X=10,\ Y=13$ (ή ανάποδα). Τελικά έχουμε $X+Y=23$.

30) Γ) 7 σοφές

Εφόσον με την είσοδο της τελευταίας γάτας αποκαλύφθηκε ότι κάποια είναι τρελή, έχουμε δύο εκδοχές. α) αυτή που μπήκε τελευταία ήταν τρελή ενώ οι τρεις που ήσαν μέσα στο δωμάτιο ήσαν σοφές ή β) η τελευταία ήταν σοφή αλλά κάποια ή κάποιες από τις τρεις που βρήκε στο δωμάτιο ήταν τρελή. Εξετάζουμε τις δύο περιπτώσεις χωριστά.

α) Έστω ότι αυτή που μπήκε ήταν τρελή ενώ ότι οι τρεις που βρήκε μέσα στο δωμάτιο (δηλαδή οι $9^η$, $10^η$ και $11^η$) ήσαν σοφές. Τότε και η $8^η$ θα ήταν σοφή γιατί αλλιώς θα αποκαλυπτόταν ως τρελή την στιγμή που οι $8^η$, $9^η$, $10^η$ και $11^η$ ήσαν στο δωμάτιο, ενώ ξέρουμε ότι η πρώτη φορά που κάποια αποκαλύφθηκε ως τρελή ήταν όταν μπήκε η $12^η$. Με τον ίδιο τρόπο σκεπτόμενοι, πηγαίνοντας προς τα πίσω, διαπιστώνουμε ότι όλες οι γάτες από την $1^η$ μέχρι την $11^η$ είναι σοφές. Συνοψίζοντας, η περίπτωση αυτή στο τέλος είναι η ΣΣΣΣ ΣΣΣΣ ΣΣΣΤ, όπου γράψαμε για συντομία Σ για κάθε σοφή γάτα και Τ για κάθε τρελή. Η περίπτωση αυτή απορρίπτεται γιατί υπάρχει μόνο μία τρελή γάτα στο τέλος, ενώ ξέρουμε ότι είναι τουλάχιστον δύο.

β) Έστω ότι η τελευταία ήταν σοφή αλλά κάποια ή κάποιες από τις τρεις που βρήκε στο δωμάτιο ήταν τρελή. Για την ακρίβεια μόνο μία πρέπει να είναι η τρελή, αλλιώς η δεν θα αποκαλυπτόταν κάποια ως τρελή. Έτσι έχουμε τώρα τρεις εκδοχές:

β1) Η τρελή είναι η $11^η$ και άρα οι $10^η$ και $9^η$ σοφές. Τότε η $8^η$ θα ήταν τρελή (αλλιώς οι $8^η$, $9^η$ και $10^η$ θα αποκάλυπταν την τρελή $11^η$). Όμοια σκεπτόμενοι η $7^η$ είναι τρελή (αλλιώς θα αποκαλυπτόταν η $8^η$), η $6^η$ σοφή, η $5^η$ σοφή και ούτω καθεξής. Πηγαίνοντας προς τα πίσω οι γάτες με την σειρά από την πρώτη θα ήσαν ΣΣΤΤ ΣΣΤΤ ΣΣΤΣ.

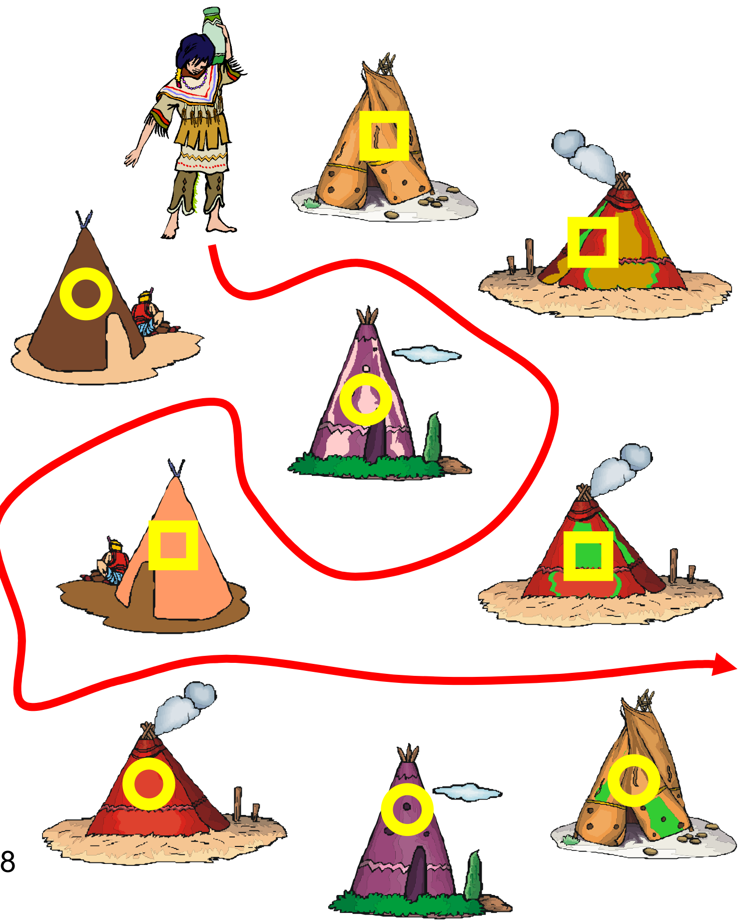
β2) Η τρελή είναι η $10^η$ και άρα οι $11^η$ και $9^η$ είναι σοφές. Με παρόμοιο συλλογισμό η $8^η$ θα είναι τρελή (αλλιώς η $8^η$, $10^η$ και $11^η$ θα αποκάλυπταν την τρελή $10^η$). Τώρα, η $7^η$ είναι σοφή γιατί αν ήταν τρελή, τότε όταν βρέθηκαν μαζί οι 7'η, 8^{η}, 9^{η} και 10^{η}, θα είχαμε 3 τρελές και μία σοφή γάτα, που σημαίνει ότι θα είχε τρελαθεί η 9^{η}, ενώ ξέρουμε ότι παρέμεινε σοφή. Από το γεγονός ότι η 7^{η} είναι σοφή και πηγαίνοντας προς τα πίσω, οι γάτες είναι ΣΤΣΤ ΣΤΣΤ ΣΤΣΣ.

β3) Η τρελή είναι η 9^{η} και άρα οι 10^{η} και 11^{η} είναι σοφές. Τότε η 8^{η} είναι τρελή (αλλιώς θα αποκαλυπτόταν η τρελή 9^{η}). Πηγαίνοντας προς τα πίσω θα βρίσκαμε ότι οι γάτες ήσαν ΤΣΣΤ ΤΣΣΤ ΤΣΣΣ.

Αν εξετάσουμε τις περιπτώσεις β1), β2) και β3), θα δούμε ότι (και στις τρεις περιπτώσεις) υπάρχουν 7 σοφές και 5 τρελές γάτες.

Απαντήσεις στα άρθρα του βιβλίου

Β΄ Δημοτικού, σελίδα 48



Γ΄ Δημοτικού, σελίδα 49

α) $8 \to \times 10 \to 80 \to :10 \to 8$

β) $8 \to \times 100 \to 800 \to :10 \to 80 \to :10 \to 8$

γ) $8 \to \times 10 \to 80 \to :10 \to 8 \to \times 10 \to 80$

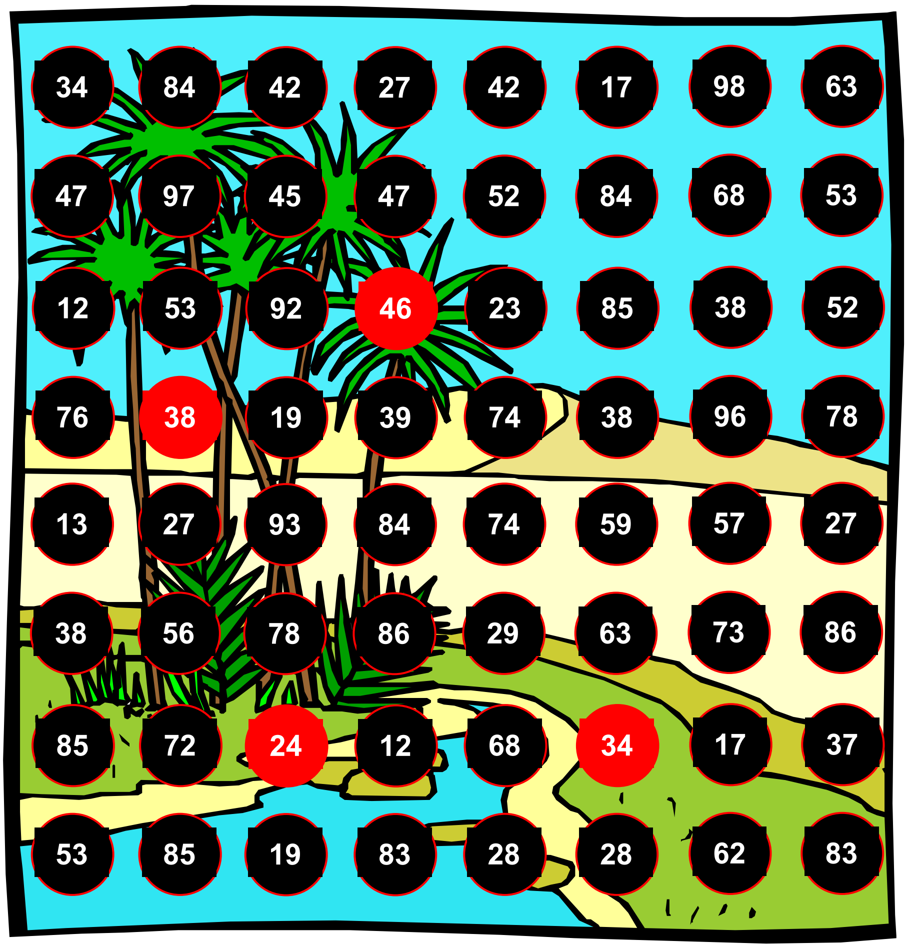
δ) $80 \to \times 10 \to 800 \to :10 \to 80 \to :10 \to 8$

ε) $8 \to \times 10 \to 80 \to :10 \to 8 \to \times 10 \to 80 \to :10 \to 8$

στ) $8 \to \times 10 \to 80 \to :10 \to 8 \to \times 100 \to 800 \to :10 \to 80$

Δ΄ Δημοτικού, σελίδα 50

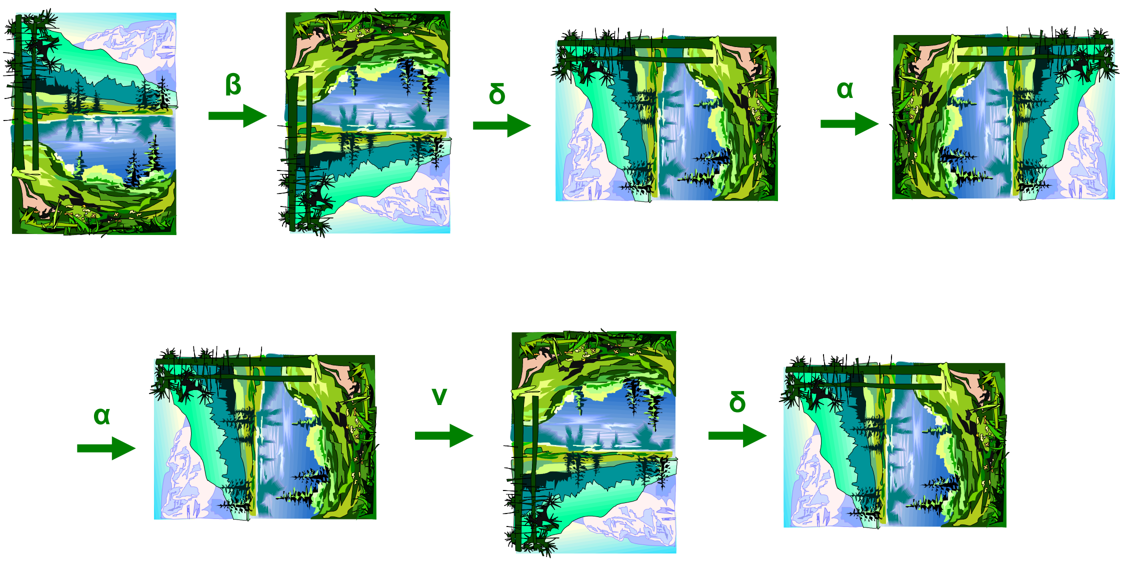
Προσπαθούμε να μειώσουμε τις περιπτώσεις που εξετάζουμε. Εφόσον θέλουμε να υπάρχουν αριθμοί πάνω, κάτω, δεξιά και αριστερά από τους ζητούμενους, περιοριζόμαστε στους εσωτερικούς $6 \times 6 = 36$ αριθμούς. Επίσης, αφού ο αριθμός δεξιά αυτού που αναζητούμε είναι το μισό του, ο αριθμός μας πρέπει να είναι ζυγός, άρα απορρίπτονται όλοι οι μονοί αριθμοί. Με έλεγχο, τελικά, βρίσκουμε τέσσερις αριθμούς.



ΣΤ΄ Δημοτικού, σελίδα 51

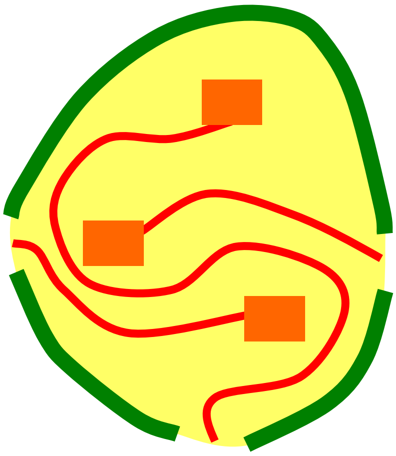
Σωστή απάντηση: Δ

Οι εικόνες δείχνουν τους διαδοχικούς μετασχηματισμούς.

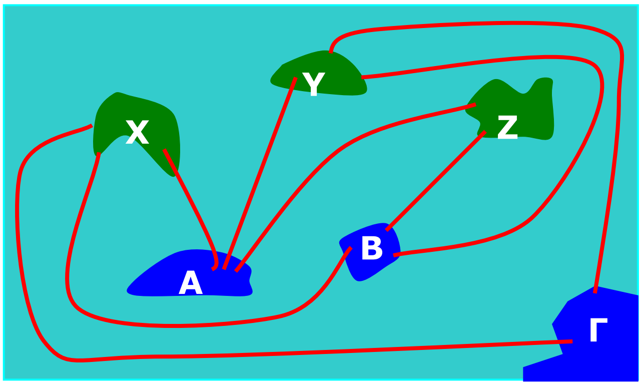


Διαδρομές αποφυγής, σελίδα 56

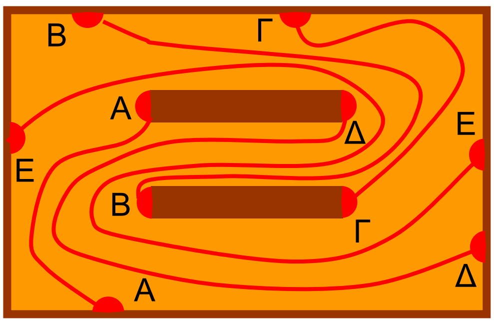
Πρόβλημα 1



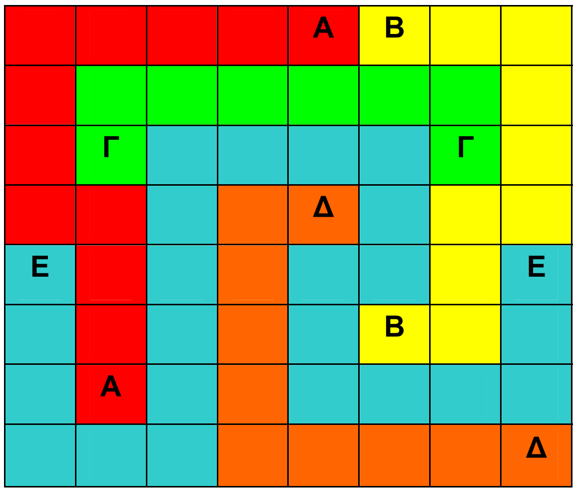
Πρόβλημα 2



Πρόβλημα 3



Πρόβλημα 4



Πρόβλημα 5