Αιτιολογημένες λύσεις στα θέματα Γυμνασίου και Λυκείου του διαγωνισμού "Καγκουρό 2022"

Α΄ και Β΄ Γυμνασίου — Επίπεδο 3

1) Δ) 4
Το άθροισμα των ψηφίων του 1011 είναι 3. Από το κριτήριο διαιρετότητας του 3, ο 1011 διαιρείται με το 3. Αν θέλουμε να το ελέγξουμε αυτό, αν και περιττεύει, έχουμε 1011 = 3x337. Το άθροισμα των ψηφίων του 1013 είναι 5, και ο 1013 δεν διαιρείται με το 5 καθώς τα πολλαπλάσια του 5 λήγουν μόνο σε 0 ή 5. Το άθροισμα των ψηφίων του 1015 είναι 7. Εκτελούμε την Ευκλείδεια διαίρεση 1015:7 για να δούμε αν έχουμε υπόλοιπο ή όχι. Είναι 1015 = 7x145, οπότε το 7 είναι διαιρέτης του 1015. Το άθροισμα των ψηφίων του 1016 είναι 8, και εύκολα διαπιστώνουμε ότι 1016 = 8x127. Τέλος. Το άθροισμα των ψηφίων του 1017 είναι 9. Από το κριτήριο διαιρετότητας του 9, ο 1017 διαιρείται με το 9 (αν θέλουμε να ελέγξουμε, αν και περιττεύει, έχουμε 1017 = 9x113).

2) Γ) 81 m^2
Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει περίμετρο 3x12 = 36 m. Άρα το τετράγωνο έχει πλευρά 36:4 = 9 m, οπότε το εμβαδόν του είναι 9x9 = 81 m^2.

3) Β) 50 cm^2
Η διαγώνιος του τετραγώνου είναι άξονας συμμετρίας του σχήματος. Οπότε κάθε γαλάζια περιοχή είναι ακριβώς ίδια με την λευκή συμμετρική της από την άλλη πλευρά του άξονα. Συνεπώς το εμβαδόν όλων των γαλάζιων περιοχών είναι ίσο με των λευκών. Άρα η κάθε περιοχή, γαλάζια ή λευκή, έχει εμβαδόν όσο το μισό του 10x10 τετραγώνου, δηλαδή 50 cm^2.

4) Ε) 22 χρονών
Εφόσον ο μέσος όρος των ηλικιών των τριών καγκουρό είναι 16 χρόνια, σημαίνει ότι το άθροισμα των ηλικιών τους είναι 3x16 = 48 χρόνια. Εφόσον ο μέσος όρος των ηλικιών των δύο νεαρότερων είναι 13 χρόνια, σημαίνει ότι το άθροισμα των ηλικιών τους είναι 2x13 = 26 χρόνια. Με άλλα λόγια, τα τρία καγκουρό έχουν άθροισμα ηλικιών 48 και τα δύο πιο μικρά, 26 χρόνια. Άρα το τρίτο και μεγαλύτερο είναι 48 – 26 = 22 χρονών.

5) Δ) 10
Μας δίνεται ότι (α+1)(β+1) = 77. Εδώ οι α+1, β+1 είναι φυσικοί αριθμοί μεγαλύτεροι του 1. Ο μόνος τρόπος να βρούμε γινόμενο 77 από τον πολλαπλασιασμό φυσικών αριθμών μεγαλύτερων του 1 είναι πολλαπλασιάζοντας τους 7 και 11, συμβολικά 77 = 7x11. Αν λάβουμε υπόψη, όπως μας δίνει η άσκηση, ότι α > β, σημαίνει ότι έχουμε α+1 = 11 και β+1 = 7. Άρα α = 10 (και β = 6).

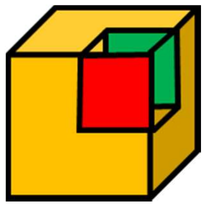
6) Δ) 7
Πρέπει να βρούμε έναν συνδυασμό από πακέτα των 12 και των 25 των οποίων το συνολικό πλήθος από μπίλιες να είναι (ακριβώς) 97. Σίγουρα δεν μπορεί να αγοράσει μόνο πακέτα των 12 γιατί το 97 δεν είναι πολλαπλάσιο του 12 (το βλέπουμε αμέσως αν σκεφτούμε ότι είναι περιττός αριθμός ενώ τα πολλαπλάσια του 12 είναι άρτιοι). Άρα πρέπει να αγοράσει τουλάχιστον 1 πακέτο των 25. Τα πακέτα των 25 πρέπει να είναι το πολύ 3 διότι τα 4 ξεπερνούν τις 97 μπίλιες (είναι 4x25 = 100). Εξετάζουμε πρώτα αν μπορεί να βρει συνδυασμό με 3 πακέτα των 25 και τα υπόλοιπα των 12. Αφού 3x25 = 75, χρειάζεται άλλες 97-75 = 22 μπίλιες. Όμως το 22 δεν είναι πολλαπλάσιο του 12, οπότε δεν μπορεί να επιλέξει αυτή την εκδοχή. Δοκιμάζουμε συνδυασμό με 2 πακέτα των 25. Μένουν τότε 72 – 25 = 47 μπίλιες, που πάλι δεν είναι πολλαπλάσιο του 12, οπότε απορρίπτουμε

και αυτή την εκδοχή. Εξετάζουμε την περίπτωση που παίρνει ένα πακέτο των 25. Μένουν άλλες 97-25 = 72 μπίλιες, που είναι πολλαπλάσιο του 12 καθώς 6x12 = 72. Συμπεραίνουμε ότι ο μαθητής πρέπει να αγοράσει 6 πακέτα των 12 και ένα των 25, σύνολο 7 πακέτα. Αυτός είναι και ο μοναδικός τρόπος.

7) Β) 69
Μας ενδιαφέρουν τα πολλαπλάσια του 13 στο διάστημα από το 100 μέχρι το 999. Η Ευκλείδεια διαίρεση δίνει 100 = 7x13+9 οπότε το μικρότερο πολλαπλάσιο του 13 σε αυτό το διάστημα είναι το 8x13 (αυτό ισούται βέβαια με 104, αλλά δεν μας ενδιαφέρει). Όμοια, 999 = 76x13+11, οπότε το τελευταίο πολλαπλάσιο του 13 στο διάστημα που εξετάζουμε είναι το 76x13 (αυτό ισούται με 988, αλλά δεν μας ενδιαφέρει). Έτσι το πλήθος των πολλαπλασίων του 13 που θέλουμε να προσδιορίσουμε είναι όσοι οι αριθμοί 8, 9, 10, … , 76, δηλαδή 76 – 8+1 = 69.

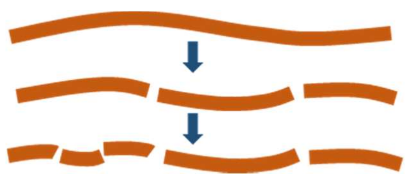
8) Δ) 16
Είναι σαφές ότι μόνος τρόπος τα ψηφία του 10-ψήφιου να έχουν γινόμενο 15 είναι όταν ο αριθμός περιέχει ένα 3, ένα 5 και τα υπόλοιπα οκτώ ψηφία να είναι 1. Αν θέλουμε παραδείγματα τέτοιων αριθμών είναι τα 1131111151 ή 5311111111 ή παραλλαγές τους, πάντως το κοινό τους χαρακτηριστικό είναι ότι όλοι αυτοί οι αριθμοί έχουν άθροισμα ψηφίων 3+5+8x1 = 16.

9) Ε) όλα χρειάζονται την ίδια ποσότητα μπογιάς
Όταν αφαιρούμε έναν κύβο από μία κορυφή του αρχικού κύβου φεύγει ένα μέρος του όπως για παράδειγμα το κόκκινο τετράγωνο στην εικόνα. Όμως παράλληλα προστίθεται ένα ίδιο κομμάτι, όπως το πράσινο τετράγωνο. Άρα η επιφάνεια του αρχικού κύβου δεν αλλάζει. Συνεπώς χρειάζεται ακριβώς την ίδια μπογιά όπως ο αρχικός κύβος.



10) Γ) 3
Λίγο πριν μετρηθούν όλοι οι ψήφοι, είχαν μετρηθεί 14+11+10+8+2 = 45. Άρα έμεναν άλλοι 50-45 = 5. Η καλύτερη εκδοχή για κάποιον υποψήφιο είναι να πάρει και τους 5 από τους ψήφους που ακόμα δεν μετρήθηκαν, και ως αποτέλεσμα να ξεπεράσει την τωρινή πρώτη, που είναι η Άρτεμις με 14 ψήφους. Αυτό το καταφέρνουν α) η Άρτεμις (αυτονόητο), β) ο Βάκης αφού 11+5 = 16 >14, γ) η Γοργώ αφού 10+5 = 15 >14 αλλά όχι η Δανάη αφού 8+5 = 13 < 14 και φυσικά ούτε ο Ερμής που είναι τώρα πίσω από την Δανάη. Τελικά μόνο η Άρτεμις, ο Βάκης και η Γοργώ έχουν ελπίδα να νικήσουν.

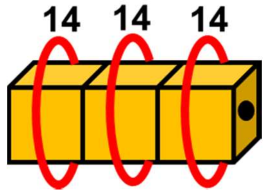
11) Γ) 34
Στη αρχή ο κ. Γόρδιος είχε ένα κομμάτι σχοινί και αμέσως μετά έγιναν 3, δηλαδή αυξήθηκαν κατά 2. Αυτό συμβαίνει κάθε φορά που κόβει ένα κομμάτι στα τρία, δηλαδή έχουμε κάθε φορά αύξηση του πλήθους των κομματιών κατά 2. Με άλλα λόγια τα κομμάτια του σχοινιού γίνονται διαδοχικά $1 \to 3 \to 5 \to 7 \to \ldots$ και λοιπά, δηλαδή ένας περιττός αριθμός κάθε φορά. Άρα τα κομμάτια αποκλείεται να γίνουν 34 ή οποιοσδήποτε άλλος άρτιος αριθμός.



12) Α) 10
Τα κορίτσια που κάθονται δίπλα σε αγόρι είναι βέβαια όσα τα αγόρια. Αλλά όλα τα κορίτσια είναι διπλάσια σε αριθμό από αυτά τα συγκεκριμένα κορίτσια. Με άλλα λόγια όλα τα κορίτσια είναι διπλάσια σε αριθμό από τα αγόρια. Δηλαδή το πλήθος 30 των μαθητών της τάξης χωρίζεται σε δύο ομάδες που η μία (τα κορίτσια) είναι διπλάσια της άλλης (τα αγόρια). Είναι τώρα φανερό ότι τα κορίτσια της τάξης είναι 20 και τα αγόρια 10. Αν θέλουμε να δούμε τον ίδιο συλλογισμό αλλά με σύμβολα, μπορούμε να πούμε το εξής: Έστω Χ το πλήθος των αγοριών. Τότε τα κορίτσια που κάθονται με αγόρι είναι Χ το πλήθος και άρα όλα τα κορίτσια είναι 2Χ το πλήθος (μας το δίνει η

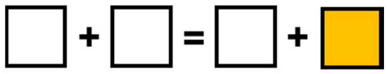
άσκηση). Άρα όλοι μαζί οι μαθητές της τάξης είναι Χ + 2Χ = 3Χ, που σημαίνει 3Χ = 30. Άρα Χ = 10, τα αγόρια.

13) Δ) 44



Αν κοιτάξουμε οποιεσδήποτε 4 έδρες του ζαριού που βρίσκονται γύρω γύρω (όπως οι 4 έδρες που έχουν κυκλωθεί από το κόκκινο δακτυλίδι στην εικόνα) τότε το άθροισμα των κουκκίδων πάνω τους είναι πάντα 7+7 = 14. Αυτό είναι ανεξάρτητο από τον προσανατολισμό του ζαριού. Οπότε για να πετύχουμε τον μικρότερο συνολικό αριθμό κουκκίδων πρέπει να μεριμνήσουμε ώστε ***στις δύο ακριανές έδρες να υπάρχει μόνο από μία κουκκίδα***. Δεν μας νοιάζει ποιες ακριβώς είναι οι υπόλοιπες ορατές πλευρές. Είναι φανερό ότι ο μικρότερος δυνατός συνολικός αριθμός από κουκκίδες εξωτερικά, είναι 1+14+14+14+1 = 44.

14) Ε) 5

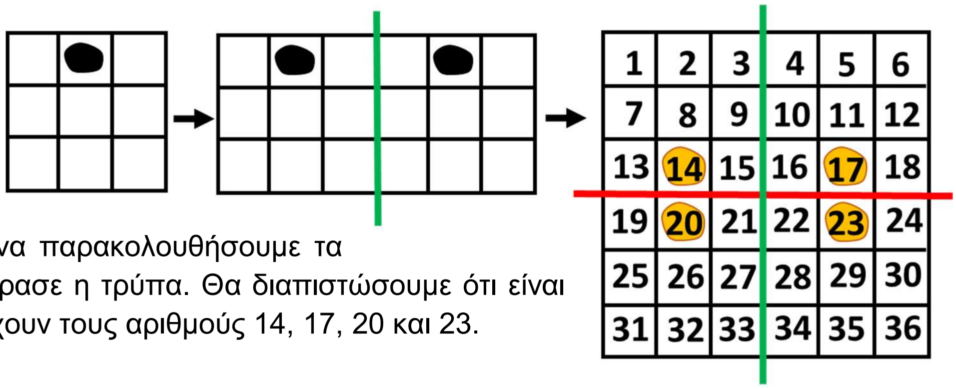


Το ερώτημα ουσιαστικά είναι πώς θα μοιράσουμε τέσσερις από τους αριθμούς 2, 3, 4, 5 και 6 έτσι ώστε το άθροισμα των δύο να είναι ίσο με το άθροισμα των άλλων δύο. Θα διαπιστώσουμε ότι ***και οι πέντε αριθμοί μπορούν να μπουν στο τελευταίο κουτί***, αρκεί να επιλέξουμε σωστά τους άλλους τρεις. Για παράδειγμα αν θέλουμε τον 2 στο τελευταίο κουτί μπορούμε να πούμε **3+4 = 5+2.** Για τον ίδιο σκοπό θα μπορούσαμε επίσης να πούμε **3+5 = 6+2**. Για τους υπόλοιπους έχουμε **2+5 = 4+3** (αλλά βρείτε και άλλο τρόπο), **2+5 = 3+4, 3+4 = 2+5, 3+5 = 2+6.** Στην πραγματικότητα δεν χρειάζεται να κάνουμε δοκιμές στα τυφλά. Για παράδειγμα, μόλις εντοπίσουμε μία ισότητα της μορφής **α+β = γ+δ** με τους αριθμούς μας (υπάρχουν πολλές τέτοιες ισότητες, όπως άλλωστε είδαμε) μπορούμε αμέσως να κατασκευάσουμε νέες απλά ανακατεύοντας κατάλληλα τους αριθμούς α, β, γ και δ. Για παράδειγμα από την **α+β = γ+δ** έχουμε αμέσως την **α+β = δ+γ** αλλά και τις **γ+δ = α+β** και **γ+δ = β+α**.

15) Γ) μεταξύ του 5 και του 6

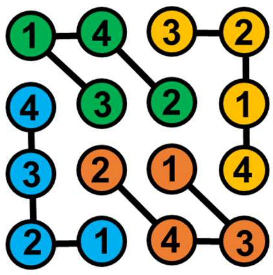
Αν δεν υπήρχε τυπογραφικό σφάλμα, η σωστή πρόσθεση θα ήταν **1+2+3+4+5+6+7+8 = 36.** Αυτό είναι κατά 36 – 24 = 12 μονάδες περισσότερο από το αποτέλεσμα που δίνει η άσκηση. Οπότε το «πλην» πρέπει να μπει μπροστά από το 12:2 = 6. Μπορούμε τώρα να ελέγξουμε ότι **1+2+3+4+5-6+7+8 = 24.**

16) Β) 14, 17, 20, 23



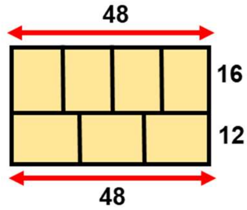
Ξεδιπλώνουμε το χαρτί δύο φορές ώστε να ξαναέλθει στην αρχική του μορφή. Τώρα είναι ευκολότερο να παρακολουθήσουμε τα σημεία από τα οποία πέρασε η τρύπα. Θα διαπιστώσουμε ότι είναι τα τετράγωνα που περιέχουν τους αριθμούς 14, 17, 20 και 23.

17) Β) 2



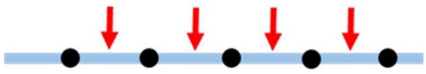
Από τους πράσινους κύκλους, οι οποίοι ήδη έχουν τους αριθμούς 2 και 3, συμπεραίνουμε ότι στην επάνω πλευρά πρέπει να υπάρχουν οι 1 και 4, με κάποια σειρά. Άρα οι άλλοι δύο κύκλοι στην επάνω σειρά πρέπει να περιέχουν τους 2 και 3. Όμως στην τρίτη στήλη ήδη υπάρχει ο 2, άρα στον κίτρινο κύκλο της τρίτης στήλης μπαίνει ο 3. Συμπεραίνουμε ότι στον κύκλο με το Χ μπαίνει το 2. Αυτό ολοκληρώνει την άσκηση, αλλά αν θέλουμε να συμπληρώσουμε και τους υπόλοιπους κύκλους σκεπτόμαστε ως εξής: Οι άλλοι δυο κίτρινοι κύκλοι έχουν τους 1 και 4. Αλλά το 1 ήδη υπάρχει στην τρίτη γραμμή, οπότε η σωστή τους θέση είναι όπως στην εικόνα. Τώρα οι δύο επάνω γαλάζιοι κύκλοι συμπληρώνονται άμεσα, και κατόπιν όλο το υπόλοιπο σχήμα. Το τελικό αποτέλεσμα φαίνεται στην εικόνα.

18) Γ) 152 m



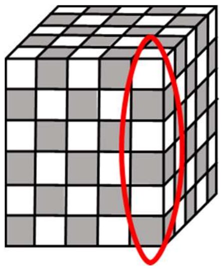
Αφού η μικρή πλευρά κάθε τεμαχίου είναι 12 m, σημαίνει ότι η μία πλευρά του κήπου είναι 4x12 = 48 m. Κοιτάμε τώρα την κάτω πλευρά του κήπου, που βέβαια επίσης έχει μήκος 48 m. Επειδή η κάτω πλευρά έχει μήκος όσο 3 φορές το μήκος κάθε τεμαχίου, σημαίνει ότι τα τεμάχια έχουν μήκος 48:3 = 16 m. Συμπεραίνουμε ότι ο κήπος έχει μία διάσταση 48 m και η άλλη είναι 16+12 = 28 m. Άρα η περίμετρος είναι 2x(48+28) = 152 m.

19) Α) 80



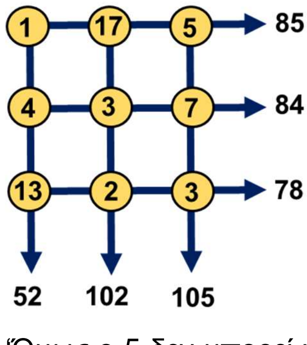
Αν αρχικά το πλήθος των σημείων ήταν Ν, τότε η τοποθέτηση ενός ακόμη σημείου στα Ν-1 ενδιάμεσα διαστήματα αυξάνει τα σημεία κατά Ν-1. Δηλαδή τα σημεία θα γίνουν Ν+(Ν-1) = 2Ν -1 σε πλήθος (στην εικόνα φαίνεται η περίπτωση Ν = 5). Για ακριβώς τον ίδιο λόγο (αλλά με 2Ν-1 στην θέση του Ν), με την επανάληψη της διαδικασίας τα σημεία θα γίνουν 2(2Ν-1)-1 = 4Ν-3. Όμοια, την τρίτη φορά τα σημεία θα γίνουν 2(4Ν-3)-1 = 8Ν-7. Αλλά μας δίνεται ότι τα σημεία έγιναν 633. Λύνοντας την εξίσωση 8Ν-7 = 633, ισοδύναμα 8Ν = 640, θα βρούμε Ν = 80.

20) Α) 225 γρ.



Ένας τρόπος να λύσουμε την άσκηση είναι να μετρήσουμε πρώτα πόσους λευκούς και πόσους γκρίζους κύβους έχει η κατασκευή. Από εκεί είναι εύκολο να βρούμε το συνολικό βάρος, αλλά αφήνουμε τις λεπτομέρειες στον αναγνώστη. Ένας ευκολότερος τρόπος να εργαστούμε είναι να κοιτάξουμε τις στήλες των 6 κύβων, όπως την σημειωμένη. Αποτελούνται από 3 λευκούς και 3 γκρίζους κύβους, οπότε το βάρος τους είναι 1x3 + 2x3 = 9 γρ. Μένει να μετρήσουμε πόσες τέτοιες στήλες υπάρχουν. Κοιτώντας την οροφή του ορθογωνίου βλέπουμε 5x5 = 25 τετράγωνα. Κάθε ένα από αυτά είναι η οροφή κάποιας από τις στήλες, οπότε οι στήλες είναι 25 τον αριθμό. Άρα το συνολικό βάρος της κατασκευής είναι 9x25 = 225 γρ.

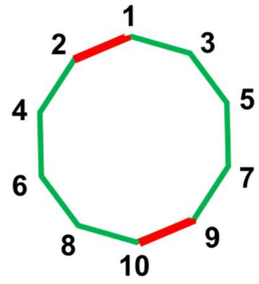
21) Β) στον Β



Τα μόνα πολλαπλάσια του 17 ανάμεσα στα γινόμενα που δίνονται στην άσκηση, είναι τα 85 = 5x17 (στην πρώτη γραμμή) και 102 = 6x17 (στην δεύτερη στήλη). Οπότε η μόνη θέση για το 17 είναι στην τομή της πρώτης γραμμής και της δεύτερης στήλης, δηλαδή στον κύκλο Β. Αν θέλουμε τον πίνακα συμπληρωμένο, παρόλο που δεν το ζητάει η άσκηση, η εικόνα δείχνει την μοναδική λύση. Για να τον συμπληρώσουμε μπορούμε να κάνουμε τους εξής συλλογισμούς: Στην πρώτη γραμμή όπου υπάρχει το 17, οι άλλοι δύο αριθμοί έχουν γινόμενο 85:17 = 5. Οπότε οι αριθμοί είναι ο 1 και ο 5, με κάποια σειρά. Όμως ο 5 δεν μπορεί να είναι στον πάνω αριστερά κύκλο γιατί το γινόμενο 52 των αριθμών στην πρώτη στήλη δεν είναι πολλαπλάσιο του 5. Άρα στον πάνω αριστερά κύκλο μπαίνει το 1, οπότε το 5 πάει στον πάνω δεξιά κύκλο. Με παρόμοιους συλλογισμούς συμπληρώνουμε τους υπόλοιπους αριθμούς.

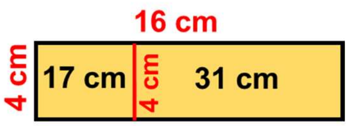
22) Β) 12:35
Κάθε ώρα τα δύο ρολόγια αυξάνουν την διαφορά τους κατά 5+7 = 12 λεπτά. Εφόσον τώρα έχουν διαφορά 1 ώρα, δηλαδή 60 λεπτά, σημαίνει ότι πέρασαν 60:12 = 5 ώρες από την στιγμή που τα ρολόγια ρυθμίστηκαν να δείχνουν την σωστή ώρα. Σε διάστημα 5 ωρών το γρήγορο ρολόι κέρδισε 5x5 = 25 λεπτά. Άρα η σωστή ώρα εκείνη την στιγμή είναι 13:00 – 0:25 = 12:35. Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε την σωστή ώρα με βάση το αργό ρολόι. Αυτό σε 5 ώρες έχασε 5x7 = 35 λεπτά. Άρα η σωστή ώρα είναι 12:00+0:35 = 12:35, όπως πριν.

23) Β) 2



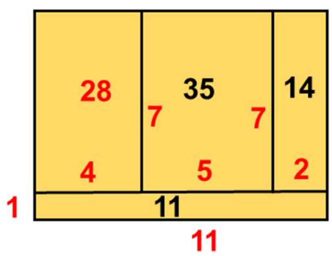
α΄ τρόπος: Εξετάζουμε τον αριθμό 1 και τους γείτονές του, οι οποίοι σύμφωνα με το πρόβλημα είναι οι 2 και 3 (βλέπε το σχήμα). Από την άλλη πλευρά του 2 μπορεί να μπει ο 3 ή ο 4, αλλά αφού ο 3 ήδη υπάρχει, υποχρεωτικά μπαίνει ο 4. Οι γειτονικοί του 3 μπορεί να είναι οι 1, 2, 4 και 5, αλλά οι 1, 3, 4 ήδη υπάρχουν, οπότε μπαίνει υποχρεωτικά ο 5. Κοιτάμε τώρα τον 4. Οι γειτονικοί του μπορεί να είναι οι 2, 3, 5 και 6, αλλά οι 2, 3, 5 ήδη υπάρχουν, οπότε μπαίνει υποχρεωτικά ο 6. Όμοια από την άλλη πλευρά του 5 μπαίνει υποχρεωτικά ο 7. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο θα διαπιστώσουμε ότι οι αριθμοί συμπληρώνονται κατά ***μοναδικό τρόπο*** όπως δείχνει η εικόνα. Διαπιστώνουμε τώρα ότι οι πλευρές που έχουν άκρα αριθμούς που διαφέρουν κατά 1 (οι κόκκινες) είναι 2. ***Ας σημειώσουμε ότι αν στον συλλογισμό μας δεν δείχναμε ότι η τοποθέτηση των αριθμών γίνεται κατά μοναδικό τρόπο, τότε η λύση είναι ελλιπής, με σοβαρό κενό. Για παράδειγμα δεν θα μπορούσαμε να απαντήσουμε στο ερώτημα αν είναι ή δεν είναι σωστή η απάντηση*** «**Ε)** υπάρχουν πολλές περιπτώσεις».
β΄ τρόπος: Ο αριθμός 10 πρέπει να μπει απέναντι (αντιδιαμετρικά) από το 1, γιατί αλλιώς είτε από την μία είτε από την άλλη κατεύθυνση αρχίζοντας από το 1 στο 10, θα υπήρχαν 4 ή λιγότερες πλευρές. Αλλά τότε ξεκινώντας από το 1 θα φτάναμε το πολύ στον 1+2x4 = 9 < 10, που δεν γίνεται. Άρα έχουμε 5 πλευρές (και από τις δύο κατευθύνσεις) αρχίζοντας από το 1 και πηγαίνοντας στο 10. Από το 2 δίπλα στο 1 και μετά πρέπει να έχουμε μόνο αυξήσεις κατά 2 (ποτέ κατά 1) από κορυφή στην διπλανή κορυφή γιατί έχουμε 4 αριθμούς να τοποθετήσουμε και χρειαζόμαστε συνολική αύξηση κατά 10-2 = 8, που δεν θα μπορούσαμε να την πετύχουμε αν δεν ήταν όλες οι αυξήσεις κατά 2. Άρα από την μία πλευρά, από τον 2 μέχρι τον 10, βρίσκονται οι άρτιοι αριθμοί, όπως στο σχήμα. Μένουν τώρα οι περιττοί αριθμοί 3, 5, 7, 9 για την άλλη πλευρά του 10-γωνου. Η τοποθέτησή τους είναι υποχρεωτικά με διαδοχική σειρά αφού οι διαφορές πρέπει να είναι 2 (αφού δεν είναι 1).

24) Α) 64 cm^2



Το άθροισμα των περιμέτρων των δύο ορθογωνίων είναι 17+31 = 48 cm, ενώ το αρχικό ορθογώνιο είχε περίμετρο 40 cm. Δηλαδή έχουμε μία αύξηση κατά 48 – 40 = 8 cm. Η αύξηση αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι στο άθροισμα 17+31 μετράμε ***και*** το κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα του σχήματος, το οποίο δεν μετράμε στον υπολογισμό της περιμέτρου του αρχικού ορθογωνίου. Ακριβέστερα, το κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα μετρήθηκε ***δύο φορές*** στο άθροισμα 17+31, μία με το αριστερό ορθογώνιο και μία με το δεξί. Άρα το μήκος του είναι 8:2 = 4 cm. Συμπεραίνουμε ότι η μία πλευρά του αρχικού ορθογωνίου είναι 4 cm. Άρα, αφού το ορθογώνιο έχει ημιπερίμετρο 40:2 = 20 cm, η άλλη του πλευρά είναι 20 – 4 = 16 cm. Έπεται ότι το εμβαδόν του είναι 4x16 = 64 cm^2.

25) Α) 28 m^2

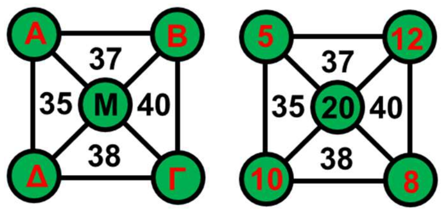


Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στην βάση έχει διαστάσεις 11 = 1x11. Για τα άλλα δύο, εκείνα των 14 m^2 και 35 m^2, θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι έχουν κοινή πλευρά. Το εμβαδόν

14 ως γινόμενο φυσικών γράφεται (μόνο) ως 14 = 1x14 ή 14 = 2x7, και το 35 m^2 μόνο ως 35 = 1x35 ή 35 = 5x7. Αυτά έχουν κοινό το 1 ή το 7. Η κοινή πλευρά 1 πρέπει να αποκλειστεί γιατί οι άλλες θα ήταν 14 και 35, αντίστοιχα, ενώ πρέπει να είναι λιγότερο από 11, που φαίνεται από το κάτω ορθογώνιο. Οπότε η κοινή πλευρά είναι 7 και άρα οι βάσεις είναι 2 και 5 μέτρα, αντίστοιχα. Άρα η βάση του αριστερού ορθογωνίου είναι 11-5-2 = 4 m. Οπότε το εμβαδόν του είναι 4x7 = 28 m^2.

26) Β) 8
Το άθροισμα των παλιών και των καινούργιων αριθμών είναι 22+34 = 56. Αλλά αν πάρουμε τους αριθμούς αυτούς σε ζευγάρια, έναν παλιό με τον αντίστοιχο νέο, το άθροισμα κάθε ζευγαριού είναι N+(7-N) = 7 (όλα τα ζευγάρια το ίδιο). Άρα υπάρχουν 56:7 = 8 ζευγάρια. Οπότε στην αρχή ήταν γραμμένοι 8 αριθμοί.

27) Γ) 20



Αν προσθέσουμε τους αριθμούς στα τέσσερα τρίγωνα, ουσιαστικά ***προσθέτουμε τους αριθμούς στις κορυφές του τετραγώνου από δύο φορές τον καθένα και τον αριθμό στο κέντρο, τέσσερις φορές***. Αυτό συμβαίνει γιατί οι αριθμοί στις γωνίες συνυπολογίζονται σε δύο τρίγωνα και ο μεσαίος σε τέσσερα. Άρα ουσιαστικά έχουμε προσθέσει τους αριθμούς στους ***πέντε*** κύκλους από δύο φορές και ακόμη τον αριθμό στον μεσαίο κύκλο ακόμα δύο φορές. Αν θέλουμε να το δούμε αυτό με σύμβολα, έχουμε

(Α+Β+Μ)+(Β+Γ+Μ)+(Γ+Δ+Μ)+(Δ+Α+Μ) = 37+40+38+35 ή αλλιώς
2Α+2Β+2Γ+2Δ+4Μ = 150 ή αλλιώς (2Α+2Β+2Γ+2Δ+2Μ)+2Μ = 150

Συνεχίζουμε. Η ποσότητα 2Α+2Β+2Γ+2Δ+2Μ = 2(Α+Β+Γ+Δ+Μ) είναι το διπλάσιο του αθροίσματος των αριθμών σε όλους τους κύκλους, που από την πληροφορία που μας δίνεται είναι 2x55 = 110. Δηλαδή η προηγούμενη ισότητα γράφεται 110+2Μ = 150, από όπου Μ = 20. Αυτή είναι η απάντηση μας. Αν θέλουμε παράδειγμα αριθμών που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος, αν και δεν το ζητά η άσκηση, δίνουμε μία περίπτωση στην εικόνα επάνω δεξιά αλλά σημειώνουμε ότι υπάρχουν πολλές άλλες. Συγκεκριμένα, αν Α όπως στο σχήμα έχουμε Α+Β+Μ = 37, οπότε Α+Β+20 = 37, άρα Β = 17 – Α. Όμοια Δ = 15 – Α. Τέλος, από το κάτω τρίγωνο είναι Δ+Γ+Μ = 38, δηλαδή (15-Α)+Γ+20 = 38, από όπου Γ = 3+Α. Με άλλα λόγια οι αριθμοί Α, Β, Γ, Δ στις κορυφές είναι οι Α, 17-Α, 3+Α και 15-Α, αντίστοιχα, για οποιοδήποτε Α. Στο προηγούμενο παράδειγμα πήραμε Α = 5.

28) Α) 2 kg
α΄ τρόπος: Αν το τρίτο πιο βαρύ σκυλί ζύγιζε 3 kg ή περισσότερο, τότε το συνολικό βάρος των σκυλιών θα ήταν τουλάχιστον 29+28+3+1 = 61 (αιτιολογείστε. Θυμηθείτε ότι τα βάρη των σκυλιών είναι διαφορετικά). Αυτό όμως δεν γίνεται αφού μας δίνεται ότι το συνολικό τους βάρος είναι 60 kg. Άρα το τρίτο πιο βαρύ σκυλί ζυγίζει 2 ή 1 κιλό, οπότε σίγουρα 2 kg αφού υπάρχει και τέταρτο πιο ελαφρύ σκυλί. Αυτό απαντά στο ερώτημα, αλλά αν θέλουμε παράδειγμα περίπτωσης όπως την περιγράφει το πρόβλημα, η μοναδική λύση είναι 29 kg, 28 kg, 2 kg και 1 kg.
β΄ τρόπος: Το πιο βαρύ σκυλί δεν μπορεί να είναι 30 κιλά ή παραπάνω γιατί τότε το συνολικό βάρος θα ήταν τουλάχιστον 30+28+2+1 = 61, που δεν γίνεται. Άρα το πιο βαρύ σκυλί ζυγίζει 29 kg και άρα τα δύο πιο ελαφριά έχουν συνολικό βάρος 60-29-28 = 3 kg. Συμπεραίνουμε ότι ζυγίζουν 2 kg και 1 kg, αντίστοιχα, και καταλήγουμε ξανά στην προηγούμενη απάντηση.

29) A) Πέμπτη

Αν ο Τζίμης μίλησε μια από τις ημέρες που λέει ψέματα, δηλαδή κάποια Δευτέρα ή Τρίτη ή Τετάρτη, τότε αποκλείεται να ήταν Τρίτη ή Τετάρτη γιατί τότε η φράση που είπε «Χθες ήταν μία από τις ημέρες που λέω ψέματα» θα ήταν αληθής (ενώ δεν είναι). Από την άλλη, ***η Δευτέρα είναι πιθανή απάντηση*** γιατί τότε λέει ψέματα που είναι συμβατό με την φράση του καθώς η προηγούμενη μέρα, Κυριακή, είναι ημέρα που λέει την αλήθεια. Ας δούμε τώρα την περίπτωση που ο Τζίμης μίλησε κάποια από τις μέρες που λέει την αλήθεια, δηλαδή κάποια Πέμπτη, Παρασκευή, Σάββατο ή Κυριακή. Αποκλείεται να ήταν Παρασκευή, Σάββατο ή Κυριακή γιατί την προηγούμενη μέρα λέει την αλήθεια, που δεν είναι συμβατό με την φράση του «Χθες ήταν μία από τις ημέρες που λέω ψέματα». Από την άλλη ***η Πέμπτη είναι πιθανή απάντηση*** γιατί τότε λέει την αλήθεια και την προηγούμενη της ημέρα, Τετάρτη, λέει ψέματα. Αν κάνουμε παρόμοιο συλλογισμό για τον φίλο του Τζίμη, θα διαπιστώσουμε ότι μίλησε ***είτε Πέμπτη είτε Κυριακή***. Η κοινή τους μέρα είναι η Πέμπτη, που είναι η απάντηση στο πρόβλημα.

30) Ε) 8

4		**7**
x		**y**
5		**ω**

Κοιτάμε το πάνω αριστερά 2x2 τετράγωνο. Περιέχει τους αριθμούς 4, x και τους αριθμούς στα δύο γαλάζια τετράγωνα (δεν μας ενδιαφέρει ποιοι ακριβώς είναι αυτοί). Επίσης κοιτάμε το πάνω δεξιά 2x2 τετράγωνο. Περιέχει τους 7, y και τους αριθμούς στα δύο γαλάζια τετράγωνα. Οι αριθμοί στα δύο αυτά 2x2 τετράγωνα έχουν το ίδιο άθροισμα. Αν αφαιρέσουμε τους αριθμούς στα δύο γαλάζια τετράγωνα, που είναι κοινοί στα δύο αθροίσματα, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $4+x = 7+y$, δηλαδή ότι $x = 3+y$. Για παρόμοιο λόγο αλλά αρχίζοντας από τα δύο κάτω 2x2 τετράγωνα, καταλήγουμε ότι $x+5 = y+\omega$. Αντικαθιστώντας το x από την προηγούμενη (ή αφαιρώντας κατά μέλη την πρώτη από την δεύτερη) θα βρούμε $\boldsymbol{\omega = 8}$. ***Πρόσθετο ερώτημα για όσους θέλουν να ασχοληθούν:*** Αν στις τέσσερις γωνίες είχαμε τους αριθμούς α, β, γ και δ (στην θέση των 4, 7, 5 και ω, αντίστοιχα), δείξτε ότι $\alpha+\delta = \beta+\gamma$. (Στο συγκεκριμένο παράδειγμα είχαμε την περίπτωση $4+8 = 7+5$.)

Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου Επίπεδο 4

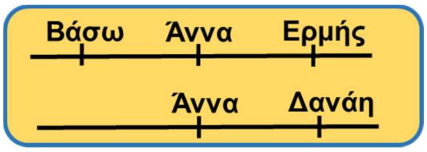
1) A) 25^3

Είναι $\dfrac{5^8}{25} = \dfrac{5^8}{5^2} = 5^6 = (5^2)^3 = 25^3$.

2) Γ) 50 m^2

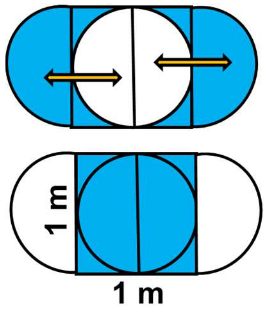
Το κάθε τρίγωνο έχει το μισό εμβαδόν του ορθογωνίου στο οποίο περιέχεται. Άρα το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσο με το μισό του αθροίσματος των δύο εμβαδών των ορθογωνίων. Αλλά τα ορθογώνια έχουν συνολικό εμβαδόν όσο το τετράγωνο, δηλαδή 100 m^2. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι 100:2 = 50 m^2.

3) Β) Η Δανάη και ο Ερμής



Τοποθετούμε τις πληροφορίες σε έναν άξονα αριθμών. Η πρώτη πληροφορία είναι σχεδιασμένη παραστατικά στον επάνω άξονα και η δεύτερη στον κάτω. Με βάση την Άννα που εμφανίζεται και στους δύο άξονες είναι φανερό ότι μόνο η Δανάη και ο Ερμής θα μπορούσε να είχαν την ίδια ηλικία.

4) Ε) κανένα από τα προηγούμενα



Η ιδέα ***δεν*** είναι να αρχίσουμε να υπολογίζουμε χωριστά το εμβαδόν κάθε περιοχής του σχήματος, αλλά να τις συγκρίνουμε. Παρατηρούμε ότι το ημικύκλιο αριστερά είναι ίσο με το μισό του κύκλου μέσα στο τετράγωνο, οπότε μπορούμε να ανταλλάξουμε θέση αυτών των δύο ημικυκλίων χωρίς να αλλάξει το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής. Κάνουμε το ίδιο με τα δύο ημικύκλια δεξιά. Τώρα το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής είναι εύκολο να υπολογισθεί, αφού είναι τετράγωνο πλευράς 1 m. Το εμβαδόν της είναι 1 m^2 (ανεξάρτητο του π).

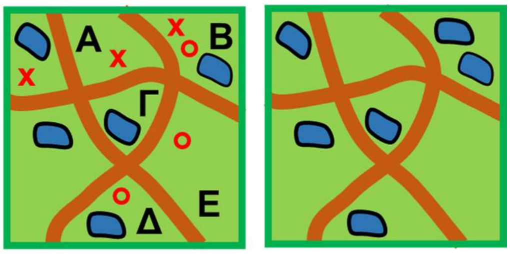
5) Β) 220

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι στο διάστημα που μας ενδιαφέρει υπάρχουν 11 αριθμοί που γράφονται μόνο με 0 και 2, οι οποίοι κατά σειρά μεγέθους είναι οι

2, 20, 22, 200, 202, **220**, 222, 2000, 2002, 2020, 2022

Ο μεσαίος είναι, λοιπόν, ο 220.

6) Β) στην Β



Κοιτάμε το μονοπάτι που διασχίζει το πάρκο από αριστερά προς τα δεξιά. Έχει δύο λίμνες από την μία του πλευρά και τρεις από την άλλη, οπότε η λίμνη που λείπει είναι σε κάποια από τις περιοχές που είναι σημειωμένη με **Χ** στον χάρτη του πάρκου. Κοιτάμε τώρα το μονοπάτι που αρχίζει κάτω αριστερά. Αυτό έχει τρεις λίμνες αριστερά του και δύο δεξιά του. Οπότε η λίμνη που λείπει είναι σε κάποια από τις περιοχές που είναι σημειωμένη με **Ο** στον χάρτη του πάρκου. Η μόνη περιοχή που περιέχει και **Χ** και **Ο** είναι η Β. Άρα η αόρατη λίμνη βρίσκεται στην περιοχή Β αλλά πρέπει να ελέγξουμε ότι και το τρίτο μονοπάτι έχει τρεις λίμνες από την κάθε του πλευρά. Ο έλεγχος είναι άμεσος, και ο χάρτης δεξιά διευκολύνει να το διαπιστώσουμε.

7) Α) 125

α΄ τρόπος: (Πρακτικός) Ας μετρήσουμε πρώτα τους ***διψήφιους*** αριθμούς με περιττά ψηφία. Αυτοί που αρχίζουν από 1 είναι οι 11, 13, 15, 17 και 19 (πέντε αριθμοί). Αυτοί που αρχίζουν από 3 είναι άλλοι πέντε. Όμοια έχουμε από πέντε αριθμούς στις περιπτώσεις που το πρώτο ψηφίο είναι 5, 7 ή 9. Το σύνολο είναι 5x5 = 25 περιπτώσεις. Εξετάζουμε τώρα τους τριψήφιους. Αυτοί αρχίζουν βέβαια από 1, 3, 5, 7 και 9. Πόσους έχουμε στην πρώτη εκατοντάδα; Είναι φανερό ότι είναι αριθμοί της μορφής 1ΑΒ, όπου ο ΑΒ είναι διψήφιος με περιττά ψηφία, δηλαδή που μετρήθηκε στο πρώτο βήμα, και είναι 25 τον αριθμό. Συνεπώς έχουμε 25 αριθμούς στην πρώτη εκατοντάδα. Έχουμε άλλους τόσους σε κάθε εκατοντάδα που αρχίζει με 3 ή 5 ή 7 ή 9. Το σύνολο είναι 5x25 = 125 αριθμοί.

β΄ τρόπος: (Καλύτερος) Ως πρώτο ψηφίο έχουμε 5 επιλογές, τις 1, 3, 5, 7 και 9. Ως δεύτερο έχουμε άλλες πέντε και ως τρίτο, άλλες 5. Είναι φανερό ότι το συνολικό τους πλήθος είναι 5x5x5 = 125.

8) Δ) 4

Τα τετράγωνα των φυσικών αριθμών είναι οι αριθμοί 0, 1, 4, 9, 16 και 25 (όσοι ξεπερνούν το 5^2 = 25 δεν μας ενδιαφέρουν για αυτήν την άσκηση. Γιατί;). Από αυτά έχουμε να διαλέξουμε ζεύγη με άθροισμα 5^2 = 25. Μπορούμε να τα εντοπίσουμε με σάρωση όλων των περιπτώσεων. Για παράδειγμα θα μπορούσε άραγε ο ένας προσθετέος να είναι 0; Σε αυτή την περίπτωση ο άλλος θα έπρεπε να είναι ο 25-0=25. Ο 25 βρίσκεται στον παραπάνω κατάλογο, και άρα μας κάνει, δηλαδή έχουμε την ισότητα $0^2+5^2 = 5^2$. Συνεχίζουμε. Θα μπορούσε ο ένας προσθετέος να είναι 1; Σε αυτή την περίπτωση ο άλλος θα έπρεπε να είναι ο 25-1=24, αλλά ο 24 δεν βρίσκεται στον παραπάνω κατάλογο, και άρα δεν μας κάνει. Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο για τις υπόλοιπες περιπτώσεις (εκμεταλλευόμενοι τις συμμετρίες είναι μόνο δύο ακόμη περιπτώσεις για έλεγχο). Στο τέλος θα καταλήξουμε στις ισότητες $0^2+5^2 = 5^2$ και $3^2+4^2 = 5^2$ (η τελευταία μάς είναι γνώριμη από το Πυθαγόρειο Θεώρημα). Άρα με τις συμμετρίες έχουμε 4 ζεύγη: τα (0, 5), (5, 0), (3, 4) και (4, 3).

9) Δ) 17 m^2

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα δύο φορές. Το μεγάλο τετράγωνο, δηλαδή αυτό που καθορίζεται από τις υποτείνουσες των δύο τριγώνων, έχει από την μία εμβαδόν ίσο με 3+22 m^2 και από την άλλη 8+X m^2. Άρα 3+22 = 8+X, από όπου X = 17 m^2.

10) Β) 21

Αφού ο μέσος όρος των πέντε αριθμών είναι 24, σημαίνει ότι το άθροισμά τους είναι 5x24 = 120. Με ανάλογη σκέψη το άθροισμα των τριών μικρότερων είναι 3x19 = 57 και των τριών μεγαλύτερων είναι 3x28 = 84. Παρατηρούμε ότι ο μεσαίος αριθμός είναι προσθετέος και στο άθροισμα 57 και στο 84 ενώ οι υπόλοιποι από τους πέντε αριθμούς είναι προσθετέοι μόνο σε ένα από τα δύο αθροίσματα. Άρα ***το άθροισμα 57+84 ισούται με «το άθροισμα όλων των αριθμών συν τον μεσαίο»***. Είναι τώρα φανερό ότι ο μεσαίος αριθμός είναι ο 57+84 – 120 = 21. Αν θέλουμε να δούμε τον ίδιο συλλογισμό με αλγεβρικά σύμβολα, έχουμε για τους πέντε αριθμούς $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$ τις σχέσεις $57+84 = (\alpha+\beta+\gamma)+(\gamma+\delta+\varepsilon) = (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)+\gamma = 120 + \gamma$. Άρα $\gamma = 57+84-120 = 21$.

11) Α) 95

Έστω x η ηλικία του πιο μεγάλου ελέφαντα. Οι τέσσερις από τις απαντήσεις που έλαβε αυτός που ρώτησε την ερώτηση είναι x, ενώ η πέμπτη (του μεγαλύτερου ελέφαντα) είναι x-1 (αιτιολογείστε). Το άθροισμα των απαντήσεων είναι 4x+(x-1) = 5x-1, δηλαδή κατά μία μονάδα λιγότερο από ένα πολλαπλάσιο του 5. Από τους αριθμούς που δίνονται, μόνο ένας ***δεν*** είναι αυτής της μορφής, ο 95. Άρα είναι η απάντηση στο πρόβλημα.

12) Δ) 137 km

Πρώτα εξετάζουμε αν η αύξηση των χιλιομέτρων μπορεί να είναι «μικρή» με την έννοια να μην αλλάξουν τα δύο πρώτα ψηφία του αριθμού, δηλαδή το κοντέρ να δείχνει 91***, που σημαίνει να δείχνει το πολύ μέχρι τον 91999. Σίγουρα τότε δεν μπορεί να αυξηθεί το τρίτο ψηφίο, το 8, γιατί μπορεί να γίνει μόνο 9 αλλά το 9 ήδη υπάρχει στην πρώτη θέση. Οπότε το 8 θα μείνει απείραχτο. Ανάλογα, δεν μπορεί να αυξηθεί το τέταρτο ψηφίο, το 7, γιατί θα γίνει 8 ή 9, που ήδη υπάρχουν. Άρα το τέταρτο ψηφίο πρέπει να μείνει απείραχτο. Αλλά τότε δεν μπορεί να αυξηθεί ούτε το τελευταίο ψηφίο γιατί θα γίνει 7 ή 8 ή 9, αλλά αυτά τα ψηφία ήδη υπάρχουν. Συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει αριθμός από τον 91876 και μέχρι και τον 91999 που έχει όλα τα ψηφία του διαφορετικά. (Αυτό βέβαια μπορούμε να το ελέγξουμε κοιτώντας έναν προς έναν τους αριθμούς από το 91876 μέχρι τον 91999 αλλά νωρίτερα είδαμε έναν συντομότερο τρόπο να φτάσουμε στο ίδιο συμπέρασμα αποφεύγοντας τον έλεγχο των 91999-91875 = 124 αριθμών που μεσολαβούν). Άρα πρέπει το δεύτερο ψηφίο, το 1, να αυξηθεί. Το λιγότερο που μπορεί να γίνει είναι 2, δηλαδή ο αριθμός να έχει την μορφή 92***. Είναι τώρα εύκολο να εντοπίσουμε τον επόμενο αριθμό με διαφορετικά ψηφία. Θα διαπιστώσουμε ότι ο πιο μικρός είναι ο 92013. Η χιλιομετρική διαφορά είναι 92013 – 91876 = 137 km.

13) Γ) 5

Εξετάζουμε μόνο τα τελευταία ψηφία των αριθμών. Του πρώτου είναι σκεπασμένο. Ο δεύτερος αριθμός είναι της μορφής $(XXX2)^2$ που σημαίνει ότι μετά την εκτέλεση της πράξης, το τελευταίο ψηφίο του είναι 4 (προκύπτει από το 2x2). Επειδή ο αριθμός στο δεύτερο μέλος τελειώνει σε 9, σημαίνει ότι το τελευταίο ψηφίο του πρώτου αριθμού (μετά την ύψωση στο τετράγωνο) είναι 9-4 =

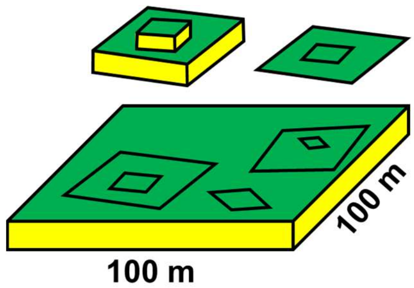
5. Αλλά ο μόνος αριθμός που αν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του δίνει τελευταίο ψηφίο 5, είναι ο 5 (καθώς 5x5 = 25). Άρα το τελευταίο ψηφίο του πρώτου αριθμού είναι 5. Αν θέλουμε παράδειγμα αριθμών που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος, αν και δεν το ζητά η άσκηση, είναι οι αριθμοί $2385^2+1202^2 = 5688225+1444804 = 7133029$.

14) Γ) 20

8	6	2	4	→20
7	5	1	3	
15	11	3	7	

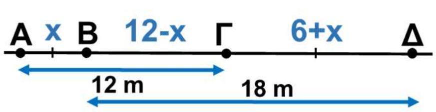
Στην τρίτη στήλη βλέπουμε τον 3. Ο μόνος τρόπος να γραφτεί ως άθροισμα δύο διαφορετικών θετικών φυσικών αριθμών είναι ο 3 = 1+2. Άρα ***οι 1 και 2 μπαίνουν στην τρίτη στήλη***. Το 7 της τέταρτης στήλης γράφεται ως 7 = 1+6 = 2+5 = 3+4. Οι πρώτες δύο εκδοχές πρέπει να αποκλεισθούν γιατί οι 1 και 2 υπάρχουν ήδη στον πίνακα, που σημαίνει ***ότι στην τέταρτη στήλη μπαίνουν οι 3 και 4***. Όμοια, στην δεύτερη στήλη, από τις γραφές 11 = 1+10 = 2+9 = 3+8 = 4+7 = 5+6 η μόνη επιτρεπτή είναι η τελευταία. Άρα ***στην δεύτερη στήλη μπαίνουν οι 5 και 6***. Τέλος, για παρόμοιο λόγο, στην ***πρώτη στήλη μπαίνουν οι 7 και 8.*** Για να εξασφαλίσουμε το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα στην πρώτη γραμμή, προτιμούμε τον μεγαλύτερο από τους δύο αριθμούς που μπαίνουν στην εκάστοτε στήλη. Το αποτέλεσμα φαίνεται στην εικόνα, από όπου διαπιστώνουμε ότι το μεγαλύτερο άθροισμα που μπορούμε να πάρουμε είναι το 8+6+2+4 = 20.

15) Α) 10^4 m^2

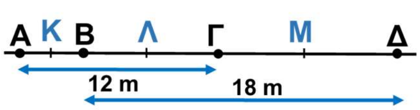


Ας δούμε πρώτα μία ευκολότερη περίπτωση, όπου έχουμε μόνο ένα κτήριο το οποίο στην οροφή του έχει ένα μικρότερο, όπως στο επάνω μέρος της εικόνας δεξιά. Παρατηρούμε ότι αν προβάλουμε την οροφή του μικρού κτηρίου στην οροφή του μεγάλου, τότε η οροφή του μικρού κτηρίου θα καταλάβει ακριβώς το ίδιο εμβαδόν με την βάση του. Άρα το πράσινο χρώμα στην οροφή του μικρού κτηρίου είναι όσο το άβαφο μέρος της οροφής του μεγάλου. Συμπεραίνουμε ότι ***το άθροισμα των δύο πράσινων εμβαδών (οι οροφές των δύο κτηρίων) είναι ακριβώς όσο το εμβαδόν της οροφής του κάτω κτηρίου***. Με λίγα λόγια, μας ενδιαφέρει μόνο πόσο είναι το εμβαδόν της οροφής του κάτω κτηρίου αφού τα εμβαδά των πράσινων περιοχών των δύο κτηρίων είναι όσο το εμβαδόν της οροφής του κάτω κτηρίου, σαν να μην είχε επάνω του το μικρό. Με αυτά κατά νου, και κάνοντας το ίδιο επιχείρημα πολλές φορές, θα διαπιστώσουμε ότι το συνολικό πράσινο εμβαδόν είναι όσο το εμβαδόν της οροφής του αρχικού κτηρίου, δηλαδή 100x100 = 10^4 m^2. Στην εικόνα παραπάνω βλέπουμε τις προβολές των οροφών διάφορων κτηρίων, ακόμα και αυτών που είναι σε οροφή κτηρίου που από μόνο του είναι στην οροφή του μεγάλου.

16) Δ) 15 m



α΄ τρόπος: (Με εξίσωση) Αν θέσουμε ΑΒ = x, τότε ΒΓ = ΑΓ-ΑΒ = 12-x. Έπεται ότι ΓΔ = ΒΔ-ΒΓ = 18-(12-x) = 6+x. Άρα η απόσταση από το μέσον του ΑΒ μέχρι το μέσον του ΓΔ είναι $\frac{1}{2}ΑΒ+ΒΓ+\frac{1}{2}ΓΔ=\frac{1}{2}x+(12-x)+\frac{1}{2}(6+x)$, που μετά τις πράξεις ισούται με 15 m.

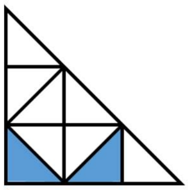


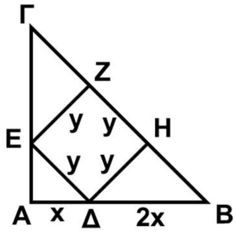
β΄ τρόπος: (Χωρίς εξίσωση) Έστω Κ, Λ, Μ τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ, αντίστοιχα. Θέλουμε την απόσταση ΚΜ που θα την βρούμε από την σχέση ΚΜ = ΚΛ+ΛΜ. Εδώ ΚΛ = ΚΒ+ΒΛ = $\frac{1}{2}ΑΒ+\frac{1}{2}ΒΓ=\frac{1}{2}(ΑΒ+ΒΓ)=\frac{1}{2}ΑΓ=6$. Όμοια ΛΜ = ΛΓ+ΓΜ = $\frac{1}{2}ΒΓ+\frac{1}{2}ΓΔ=\frac{1}{2}(ΒΓ+ΓΔ)=\frac{1}{2}ΒΔ=9$. Άρα το ζητούμενο είναι ΚΜ = 6+9 = 15 m.

17) Γ) $4\times 8\times 12$

Έστω ότι οι διαστάσεις του τούβλου είναι Μ, Π και Υ για το μήκος, πλάτος και ύψος, αντίστοιχα. Εδώ Υ = 4 cm. Από την εικόνα του μεγάλου κύβου συμπεραίνουμε ότι το ύψος του είναι 6x4 = 24 cm. Επειδή όλες οι ακμές του κύβου είναι ίσες μεταξύ τους, σημαίνει ότι το μήκος και το πλάτος του είναι επίσης 24 cm. Πάλι από την εικόνα συμπεραίνουμε ότι 3Μ = 24 και 2Π = 24, από όπου Μ = 24:3 = 8 cm και Π = 24:2 = 12 cm. Τελικά οι διαστάσεις του τούβλου, σε cm, είναι $4\times 8\times 12$.

18) Β) 4 m^2





α΄ τρόπος: Φέρνοντας παράλληλες προς τις κάθετες πλευρές του τριγώνου σχηματίζονται διάφορα μικρότερα τρίγωνα με κοινό χαρακτηριστικό ότι είναι ορθογώνια και μάλιστα ισοσκελή γιατί οι οξείες γωνίες τους είναι από 45^o (αιτιολογείστε). Αυτά είναι όλα ίσα μεταξύ τους. Για παράδειγμα τα δύο γαλάζια ισοσκελή ορθογώνια έχουν ίσες υποτείνουσες (και οι δύο είναι πλευρές του εγγεγραμμένου τετραγώνου), οπότε είναι ίσα μεταξύ τους. Με αυτό κατά νου, παρατηρούμε ότι το αρχικό τρίγωνο χωρίστηκε σε 9 ίσα μέρη. Το εμβαδόν καθενός από τα ίσα μέρη είναι 9:9 = 1 m^2. Επειδή το τετράγωνο αποτελείται από τέσσερα τέτοια μέρη, το εμβαδόν του είναι 4 m^2.

β΄ τρόπος: Αν α η κάθετη πλευρά του τριγώνου, τότε το εμβαδόν του ικανοποιεί $\frac{1}{2}\alpha^2=9$ από όπου $\alpha=3\sqrt{2}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι αν η πλευρά ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου είναι α, τότε η υποτείνουσά του είναι $\alpha\sqrt{2}$, συμπεραίνουμε ότι η υποτείνουσα εδώ είναι ίση $3\sqrt{2}\sqrt{2}=6$ m. Έστω τώρα y η πλευρά του τετραγώνου. Τα ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα ΓΕΖ, ΒΔΗ είναι ίσα διότι ΕΖ = y = ΒΗ. Άρα ΓΖ = ΒΗ = ΖΗ = y, που σημαίνει ότι η υποτείνουσα χωρίστηκε σε τρία ίσα μέρη από τα σημεία Ζ και Η, και το καθένα έχει μήκος 6:3 = 2 m. Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι y^2 = 4 m^2.

γ΄ τρόπος: Θέτουμε ΑΔ = x. Θα είναι τότε y = ΕΔ = $x\sqrt{2}$ και άρα από το τετράγωνο ΔΕΖΗ θα είναι ΔΗ = y = $x\sqrt{2}$. Αλλά τότε από το ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΗ θα έχουμε ΔΒ = $y\sqrt{2}=(x\sqrt{2})\sqrt{2}=2x$. Άρα ΑΒ = x+2x = 3x, οπότε από το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου έπεται ότι $\frac{1}{2}(3x)^2=9$, από όπου μετά τις πράξεις έχουμε $x=\sqrt{2}$. Έπεται ότι $y=x\sqrt{2}=\sqrt{2}\sqrt{2}=2$, και το ζητούμενο εμβαδόν του τετραγώνου είναι y^2 = 4 m^2.

19) Δ) 12

Γράφουμε τον κάθε αριθμό ως γινόμενο πρώτων παραγόντων, και από εκεί συγκρίνουμε. Έχουμε $2^{2021}+2^{2022}=2^{2021}\left(1+2\right)=2^{2022}\times 3$ και $3^{2021}+3^{2022}=3^{2021}\left(1+3\right)=3^{2022}\times 4=2^2\times 3^{2022}$

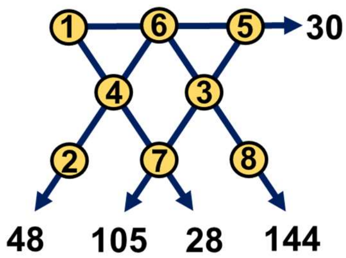
Άρα ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι $2^2\times 3=12$ (από κάθε πρώτο παράγοντα, που εδώ είναι οι 2 και 3, παίρνουμε τον παράγοντα στην μικρότερη δύναμη στην οποία είναι υψωμένος).

20) Β) $\frac{1}{5}$

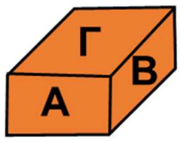
Έστω x το κλάσμα της διαδρομής που έκανε ο μαθητής με το ποδήλατο. Αφού θέλει 20 λεπτά με το ποδήλατο για όλη την διαδρομή, σημαίνει ότι για το κλάσμα αυτό χρειάζεται 20x λεπτά. Για το υπόλοιπο της διαδρομής, δηλαδή το 1-x της διαδρομής, χρειάζεται 60(1-x) λεπτά για να την διανύσει με τα πόδια. Ο συνολικός χρόνος της μεικτής διαδρομής είναι 20x+60(1-x), αλλά μας δίνεται ότι ο μαθητής χρειάστηκε 52 λεπτά. Συνεπώς καταστρώνουμε την εξίσωση 20x+60(1-x) = 52. Λύνοντας θα βρούμε $x = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$.

21) Γ) 172
Αν α και β οι πλευρές των δύο τετραγώνων, αντίστοιχα, όπου α > β φυσικοί αριθμοί, έχουμε από την υπόθεση α^2-β^2 = 43. Άρα (α-β)(α+β) = 43. Όμως ο 43 είναι πρώτος αριθμός και ο μόνος τρόπος να γραφεί ως γινόμενο δύο φυσικών, είναι 43 = 1x43. Είναι φανερό ότι έχουμε τότε α-β = 1 και α+β = 43. Από εδώ μπορούμε να βρούμε το ζητούμενο άθροισμα των περιμέτρων ακόμα και χωρίς να λύσουμε το σύστημα των α και β. Συγκεκριμένα, το άθροισμα των περιμέτρων είναι 4α+4β = 4(α+β) = 4x43 = 172. Αν θέλαμε να βρούμε και τις πλευρές, λύνοντας το σύστημα θα καταλήξουμε στα α = 22, β = 21.

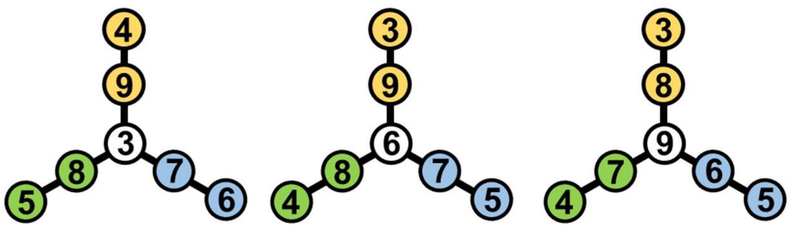
22) Δ) 17
Οι αριθμοί 30 και 105 είναι πολλαπλάσια του 5, οπότε ο **5** μπαίνει στην τομή των αντίστοιχων ευθειών. Ανάλογα οι αριθμοί 105 και 28 είναι πολλαπλάσια του 7, οπότε ο **7** μπαίνει στην τομή των αντίστοιχων ευθειών. Τώρα από το βέλος που δείχνει στο 105 λείπει ο **3** για να συμπληρωθεί το γινόμενο 105 = 3x5x7. Στο βέλος που δείχνει τον 144 ήδη υπάρχει ο 3, οπότε οι άλλοι δύο αριθμοί έχουν γινόμενο 144:3 = 48. Από τους αριθμούς που μένουν, δηλαδή τους 1, 2, 4, 6 και 8, οι μόνοι δύο που έχουν γινόμενο 48 είναι οι 6 και 8. Άρα αυτοί μπαίνουν με κάποια σειρά στο εν λόγω βέλος. Όμως ο 8 δεν μπορεί να μπει στην τομή του με το επάνω οριζόντιο βέλος γιατί ο 30 που δείχνει το επάνω οριζόντιο βέλος δεν είναι πολλαπλάσιο του 8. Άρα εκεί μπαίνει ο **6**, ενώ ο **8** μπαίνει κάτω δεξιά. Τώρα στους κύκλους που μένουν κενοί, είναι εύκολο να βρούμε με ποιο τρόπο τοποθετούνται οι 1, 2, 4. Το αποτέλεσμα φαίνεται στην εικόνα.



23) Δ) 54
Έστω ότι οι έδρες του τούβλου έχουν εμβαδά Α, Β και Γ, όπως στην εικόνα, οπότε η επιφάνειά του είναι 2(Α+Β+Γ). Τα εμβαδά των επιφανειών στην άσκηση εκφράζονται και αυτά συναρτήσει των Α, Β και Γ. Για παράδειγμα στο επάνω σχήμα έχουμε από 4 φορές τις έδρες Α και Β αλλά μόνο 2 φορές την Γ (οι άλλες δύο είναι η μία πάνω στη άλλη). Άρα έχουμε την σχέση 4Α+4Β+2Γ = 72. Όμοια 4Α+2Β+4Γ = 96 και 2Α+4Β+4Γ = 102. Προσθέτοντας κατά μέλη τις τρεις αυτές σχέσεις, βρίσκουμε 10(Α+Β+Γ) = 270, από όπου 2(Α+Β+Γ) = 270:5 = 54.

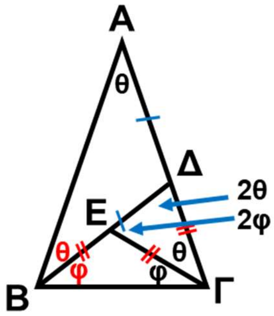


24) Δ) μόνο τους 3, 6, 9
Έστω x ο αριθμός στον κεντρικό κύκλο. Αφού το άθροισμα των αριθμών σε κάθε τριάδα κύκλων είναι το ίδιο και αφού ο κεντρικός κύκλος είναι κοινός σε όλες τις τριάδες, σημαίνει ότι το άθροισμα των δύο αριθμών στους κίτρινους κύκλους είναι ίσο με το άθροισμα των αριθμών στους δύο πράσινους κύκλους και επίσης ίσο με το άθροισμα των αριθμών στους δύο γαλάζιους. Συνεπώς αν προσθέσουμε τους αριθμούς σε όλους τους χρωματιστούς κύκλους θα βρούμε πολλαπλάσιο του 3. Αλλά το άθροισμα των αριθμών στους χρωματιστούς κύκλους είναι όσο το άθροισμα όλων των αριθμών πλην του κεντρικού x. Άρα θα έχουμε (3+4+5+6+7+8+9)-x = πολλαπλάσιο του 3, ισοδύναμα 42–x = πολλαπλάσιο του 3. Αλλά



και ο 42 είναι πολλαπλάσιο του 3, συνεπώς ο x θα είναι πολλαπλάσιο του 3. Με άλλα λόγια ο x είναι, το πολύ, ***ένας από τους 3, 6 ή 9*****.** Στην εικόνα βλέπουμε ότι και οι τρεις αυτές εκδοχές είναι πιθανές. Για να συμπληρώσουμε τους υπόλοιπους κύκλους στην κάθε περίπτωση, δεν δουλεύουμε στην τύχη αλλά ζευγαρώνουμε τον πιο μικρό αριθμό με τον πιο μεγάλο, τον δεύτερο πιο μικρό με τον δεύτερο πιο μεγάλο, και όμοια για τους άλλους δύο.

25) Ε) 36^o



Ας ονομάσουμε θ και φ τις γωνίες $A\hat{B}\Delta$ και $\Gamma\hat{B}\Delta$, αντίστοιχα (κόκκινες στο σχήμα). Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ, αντίστοιχα, έπεται ότι $B\hat{A}\Delta = \theta$ και $B\hat{\Gamma}E = \varphi$. Συγκρίνοντας τώρα την γωνία Β = θ+φ με την ίση της Γ, έπεται ότι $E\hat{\Gamma}\Delta = \theta$. Επίσης, στα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΕ, οι εξωτερικές τους γωνίες είναι $B\hat{\Delta}\Gamma = 2\theta$ και $\Gamma\hat{E}\Delta = 2\varphi$. Όμως το ΕΓΔ είναι ισοσκελές, οπότε 2θ = 2φ, δηλαδή **θ = φ**. Άρα στο αρχικό τρίγωνο οι γωνίες είναι Α = θ, Β = Γ = 2θ. Αλλά το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι 180^o, οπότε 180^o = Α+Β+Γ = θ+2θ+2θ = 5θ, από όπου θ = 180:5 = 36^o.

26) Α) $\frac{5}{3}$ λίτρα

Το λάθος μείγμα έχει 3 λίτρα μπλε μπογιάς αντί για 2, δηλαδή έχει 1 λίτρο παραπάνω μπλε μπογιά. Το καλύτερο που έχουμε να κάνουμε είναι να πετάξουμε κατάλληλη ποσότητα πράσινης μπογιάς ώστε να μειώσουμε κατά 1 λίτρο την ποσότητα της μπλε μπογιάς που έχει μέσα της. Μετά θα συμπληρώσουμε το μείγμα με κίτρινη μπογιά (δεν χρειάζεται άλλη μπλε αφού ήδη θα έχει την σωστή ποσότητα, δηλαδή 2 λίτρα). Για να μειώσουμε την μπλε μπογιά του αρχικού μείγματος από 3 σε 2 λίτρα σημαίνει ότι χρειαζόμαστε τα 2/3 της μπλε ποσότητας, δηλαδή πρέπει να πετάξουμε το 1/3 της μπλε μπογιάς του μείγματος. Άρα πρέπει να πετάξουμε το 1/3 του αρχικού μείγματος των 5 λίτρων. Συμπεραίνουμε ότι πρέπει να πετάξουμε $\frac{5}{3}$ λίτρα.

27) Ε) κανένα από τα προηγούμενα δεν είναι δυνατό
Το ενδιαφέρον με αυτή την άσκηση είναι ότι δεν χρειάζεται τρισδιάστατη φαντασία για να λυθεί αλλά με μία κομψή παρατήρηση μπορούμε να δείξουμε ότι ο μόνος πιθανός συνδυασμός σχημάτων είναι από 8 το καθένα: Παρατηρούμε ότι σε κάθε κορυφή υπάρχουν τρία τετράγωνα που έχουν ανά ζεύγη κοινή πλευρά. Άρα στα τετράγωνα αυτά υπάρχουν τρία διαφορετικά σχήματα, ένας κύκλος, ένα τρίγωνο και ένας σταυρός. Επειδή ο κύβος έχει 8 κορυφές, τελικά υπάρχουν συνολικά 8 κύκλοι, 8 τρίγωνα και 8 σταυροί. Συμπληρώνουμε ότι είναι εύκολο να κατασκευάσουμε κύβους που ικανοποιούν τον περιορισμό που θέτει η άσκηση. Για παράδειγμα η εικόνα του κύβου στην εκφώνηση μπορεί να συμπληρωθεί χωρίς δυσκολία για να κατασκευάσουμε έναν τέτοιο κύβο.

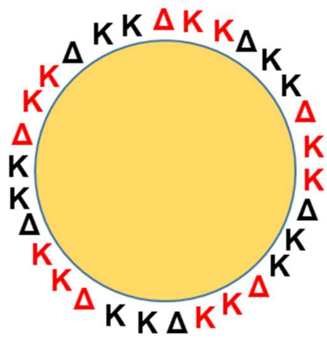
28) Δ) 80
α΄ τρόπος: Δεν προσπαθούμε να λύσουμε την άσκηση κάνοντας πολύπλοκες πράξεις ή δοκιμές, αλλά βασιζόμαστε σε μία απλή αλλά ενδιαφέρουσα παρατήρηση: Κάθε μία από τις τρείς ομάδες των πειρατών, Αξιωματικοί, ναύτες ή μαθητευόμενοι, πήραν ακριβώς 5 περισσότερα ασημένια νομίσματα από ότι χρυσά. Οπότε αν υπάρχουν Ν το πλήθος πειρατές, η διαφορά των ασημένιων από τα χρυσά νομίσματα είναι 5Ν. Αλλά από τα δεδομένα του προβλήματος η διαφορά αυτή είναι 600-200 = 400. Άρα ισχύει 5Ν = 400, από όπου Ν = 80. (Αν θέλουμε παράδειγμα ομάδας πειρατών που ικανοποιούν τις συνθήκες, παρόλο που δεν το ζητά η άσκηση, υπάρχουν πολλά. Το πώς ακριβώς μπορούμε να βρούμε τέτοια παραδείγματα φαίνεται πιο καλά στην δεύτερη λύση, αλλά για την ώρα θα αρκεστούμε στο: 20 Αξιωματικοί, 20 ναύτες και 40 μαθητευόμενοι. Ελέγξτε).

β΄ τρόπος: Αν Α το πλήθος των Αξιωματικών, Ν των ναυτών και Μ των μαθητευόμενων, θέλουμε να βρούμε την ποσότητα Α+Ν+Μ με δεδομένα ότι τα χρυσά είναι 5Α+3Ν+Μ = 200 και τα ασημένια 10Α+8Ν+6Μ = 600. Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις θα βρούμε 5(Α+Ν+Μ) = 400, από όπου Α+Ν+Μ = 80. Τελειώσαμε! Σχολιάζουμε ότι αυτό απαντά στο ερώτημα, αλλά μπορεί να πει κανείς πώς παρατηρήσαμε ότι η αφαίρεση κατά μέλη δίνει «ως δια μαγείας» τον ζητούμενο αριθμό Α+Ν+Μ; Ας δούμε λοιπόν τι θα κάναμε χωρίς αυτή την διορατική παρατήρηση. Γράφουμε τις εξισώσεις μας πηγαίνοντας το Μ στο άλλο μέλος. Γίνονται 5Α+3Ν = 200-Μ και 10Α+8Ν = 500 – 6Μ. Λύνουμε τώρα το σύστημα (δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους) κατά τα γνωστά. Θα βρούμε ***Α = Μ-20 και Ν = 100-2Μ***. Άρα Α+Ν+Μ = (Μ-20)+(100-2Μ)+Μ = 80 (το Μ από μόνο του απλοποιήθηκε). Τελειώσαμε. Εννοείται ότι αν θέλουμε παραδείγματα ομάδων που ικανοποιούν τις σχέσεις μας, δεν έχουμε παρά να δώσουμε τιμές στο Μ. Για παράδειγμα η περίπτωση Μ = 40 μας δίνει τις τιμές που καταγράψαμε στην προηγούμενη λύση. Μία ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση Μ = 50 που δίνει: 30 Αξιωματικοί, κανένας ναύτης, 50 μαθητευόμενοι. Σχολιάστε.

29) Γ) 768

Ο πιο μικρός δυνατός δέκατος όρος μιας ακολουθίας 10 διαφορετικών φυσικών αριθμών όπου ο κάθε επόμενος είναι πολλαπλάσιο του προηγούμενου είναι όταν κάθε φορά πολλαπλασιάζουμε επί 2. Η ακολουθία θα είναι η 1, 2, 2x2, 2x2x2, 2x2x2x2 … έως 2x2x2x2x2x2x2x2x2 (με σύμβολα είναι η 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9). Όμως ο τελευταίος όρος είναι 2^9 = 512, που είναι μικρότερο του 600, οπότε η ακολουθία αυτή δεν μας κάνει. Ο αμέσως επόμενος πιο μεγάλος δέκατος όρος προκύπτει αν σε κάποιο στάδιο πολλαπλασιάσουμε επί 3 αντί για 2. Δηλαδή κάποιο επόμενο πολλαπλάσιο στην ακολουθία προκύπτει από πολλαπλασιασμό επί 3 ενώ τα υπόλοιπα επί 2, που σημαίνει ότι ο τελευταίος αριθμός θα είναι ο 2^8x3 = 768. Ο αριθμός αυτός μας κάνει, αφού είναι μεταξύ του 600 και του 1000. Κανένας άλλος αριθμός δεν μας κάνει αφού ο αμέσως πιο μεγάλος δέκατος όρος μιας τέτοιας ακολουθίας είναι ο 2^8x4= 1024 > 1000 (ξεπερνά το όριο). Συμπεραίνουμε ότι ***μόνο ο 768 είναι πιθανός***. Η ακολουθία μας είναι τότε η 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^8x3 ή οι παραλλαγές της, όπως για παράδειγμα ο πολλαπλασιασμός επί 3 μπορεί να γίνει κάπου στο ενδιάμεσο της ακολουθίας, όχι κατ' ανάγκη στο τέλος.

30) Δ) 20



Αριστερά και δεξιά οποιουδήποτε δράκου κάθονται δύο καγκουρό γιατί αν κάποιο από αυτά ήταν δράκος, δηλαδή αν είχαμε την διάταξη ΚΔΔ ή την ΔΔΚ ή την ΔΔΔ, τότε ο μεσαίος από τους δράκους αυτούς θα είχε πει την αλήθεια, αντίθετα από την υπόθεση. Δηλαδή η διάταξή μας σε αυτή την περίπτωση είναι **ΚΔΚ**. Επίσης, αριστερά και δεξιά οποιουδήποτε καγκουρό δεν μπορεί να κάθονται δύο καγκουρό αφού το μεσαίο καγκουρό λέει την αλήθεια και μας διαβεβαιώνει ότι ένας από τους δύο γείτονες είναι δράκος. Δηλαδή, σε αυτή την περίπτωση, θα έχουμε κάποια από τις διατάξεις **ΔΚΔ, ΔΚΚ** ή **ΚΚΔ**. Παρατηρούμε από αυτά τα συμπεράσματα ότι σε οποιαδήποτε τριάδα υπάρχει τουλάχιστον ένα καγκουρό αλλά το πολύ 2. Χωρίζουμε τώρα τα 30 ζώα σε 10 ξένες διαδοχικές τριάδες. Σε αυτές υπάρχουν το πολύ 2x10 = 20 καγκουρό. Ευτυχώς μπορούμε να βρούμε διάταξη όπου τα καγκουρό είναι ακριβώς 20. Η εικόνα είναι μια τέτοια περίπτωση όπου ακολουθείται το μοτίβο ΔΚΚ. Άρα η απάντηση στο πρόβλημά μας είναι 20.

1) Δ)

3	2	5	4	2	1
1	4	3	1	3	4
2	5	2	5	2	1
4	1	3	1	4	3
3	2	4	2	5	2
4	1	3	1	3	4

Το δεξί άκρο του κομματιού που λείπει δεν μπορεί να περιέχει τους αριθμούς 2, 3 ή 5 γιατί αυτοί ήδη βρίσκονται στα γειτονικά τετράγωνα του άκρου αυτού. Έτσι αποκλείονται οι απαντήσεις (Α), (Β) και (Γ). Μένει να εξετάσουμε ποια από τις (Δ) και (Ε) είναι η σωστή. Το πάνω άκρο του κομματιού που λείπει δεν μπορεί να περιέχει τους αριθμούς 3 ή 5 γιατί αυτοί ήδη βρίσκονται στα γειτονικά τετράγωνα του άκρου αυτού. Αυτό αποκλείει το (Ε). Το μόνο που μένει είναι το (Δ). Για λόγους πληρότητας παραθέτουμε το παζλ συμπληρωμένο ώστε να δει ο αναγνώστης ότι ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες.

2) Β) 11

Ο αριθμός γράφεται ως $2^{11}\times 5^{10} = 2(2^{10}\times 5^{10}) = 2(2\times 5)^{10} = 2\times 10^{10}$, που σημαίνει ότι είναι της μορφής 20 000 000 000 (δηλαδή 2 ακολουθούμενο από 10 μηδενικά). Άρα έχει 11 ψηφία.

3) Β) 2^{13}

Οι δυνάμεις του 2 είναι οι αριθμοί $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$ (αγνοούμε τις υπόλοιπες ως μεγαλύτερες του 100). Από τους έξι αυτούς αριθμούς θέλουμε τρεις που το άθροισμά τους να είναι 100. Επειδή οι πέντε πρώτοι έχουν άθροισμα 1+2+4+8+16+32 = 63 < 100, οπωσδήποτε ο ένας από τους αριθμούς πρέπει να είναι ο $2^6 = 64$. Μας μένουν 100-64 = 36. Με χρήση των παραπάνω δυνάμεων του 2 ο 36 γράφεται ως άθροισμα μόνο ως 36 = 32+4. Άρα (μοναδική) γραφή του 100 ως άθροισμα δυνάμεων του 2 είναι η $100 = 64+32+4 = 2^6+2^5+2^2$. Το γινόμενό τους είναι $2^6 x 2^5 x 2^2 = 2^{6+5+2} = 2^{13}$. Ας σημειώσουμε ότι ουσιαστικά η άσκηση ζητά γραφή του 100 στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης, η οποία μόλις είδαμε ότι είναι η 1100100.

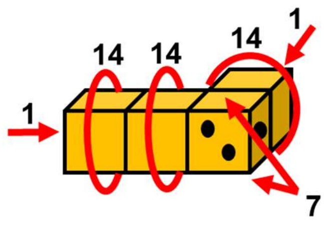
4) Α) 0

Εφόσον οι προσθετέοι της εξίσωσης είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0, η μόνη περίπτωση να είναι το άθροισμά τους 0 είναι όταν και οι δύο προσθετέοι είναι συγχρόνως 0. Αλλά αυτό δεν γίνεται καθώς μηδενίζονται για διαφορετικές τιμές του x. Άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

5) Β) x^2+1

Έχουμε $x^2-1 = (x-1)(x+1)$, $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$, $x^3+x^2 = x^2(x+1)$ και $x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) =$
$= (x-1)(x+1)(x^2+1)$, που σημαίνει ότι οι απαντήσεις (Α), (Γ), (Δ) και (Ε) έχουν τον x+1 ως παράγοντα. Από την άλλη ο x^2+1 δεν έχει τον x+1 ως παράγοντα γιατί έστω ότι είχαμε κάποια παραγοντοποίηση της μορφής $x^2+1 = (x+1)p(x)$ για κάποιο πολυώνυμο p. Παρατηρούμε τότε ότι το -1 θα ήταν ρίζα του δεξιού μέλους αλλά όχι του αριστερού καθώς $(-1)^2+1 = 1+1 \neq 0$. Άτοπο.

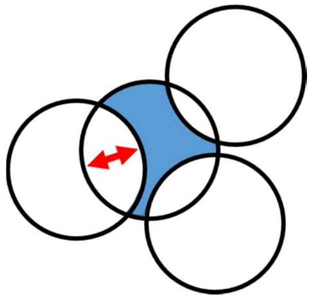
6) Δ) 54



Αν κοιτάξουμε οποιεσδήποτε 2 έδρες του ζαριού που βρίσκονται απέναντι η μία της άλλης, το άθροισμα των κουκκίδων είναι 7. Έπεται ότι οποιεσδήποτε 4 έδρες γύρω γύρω του ζαριού (όπως οι έδρες που έχουν κυκλωθεί από το κόκκινο δακτυλίδι στην εικόνα) έχουν πάντα άθροισμα των κουκκίδων πάνω τους ίσο με 7+7 = 14, ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό του ζαριού. Οπότε για να πετύχουμε τον μικρότερο συνολικό αριθμό κουκκίδων πρέπει να μεριμνήσουμε ώστε ***στις ακριανές έδρες όπου***

δεν φαίνεται η απέναντί τους έδρα, να υπάρχουν όσο γίνεται λιγότερες κουκκίδες. Τέτοιες έδρες είναι τέσσερις από τις οποίες οι δύο βρίσκονται στο γωνιακό ζάρι και οι άλλες δύο στα ακριανά. Σε αυτές τις έδρες επιλέγουμε να φαίνεται ο αριθμός 1 (ή ο 2 στην μία περίπτωση). Δεν μας νοιάζει ποιες ακριβώς είναι οι υπόλοιπες ορατές πλευρές. Είναι φανερό ότι ο μικρότερος δυνατός συνολικός αριθμός από κουκκίδες εξωτερικά, είναι 1+1+(1+2)+7+3x14 = 54.

7) Α) 2π



Είναι εύκολο να δούμε ότι τα δύο τόξα που αποκόπτονται από δύο τεμνόμενους κύκλους με ίσες ακτίνες, είναι ίσα. Ένας τρόπος να το δούμε είναι να παρατηρήσουμε ότι έχουν κοινή χορδή και, ως γνωστόν, τόξα ίσων κύκλων σε ίσες χορδές είναι μεταξύ τους ίσα. Οπότε τα καμπύλα τμήματα της περιμέτρου της γαλάζιας περιοχής είναι ίσα με τα αντίστοιχά τους τόξα του μεσαίου κύκλου. Άρα η περίμετρος της γαλάζιας περιοχής είναι όσο η περίμετρος του μεσαίου κύκλου, του οποίου η ακτίνα είναι 1. Άρα η απάντηση στο πρόβλημα είναι 2π.

8) Ε) α < 0

α΄ τρόπος: Είναι σαφές ότι δύο μη μηδενικοί αριθμοί είναι ομόσημοι αν και μόνον αν το γινόμενό τους είναι θετικός αριθμός. Εδώ το γινόμενό τους είναι $-6α^7β^8γ^6$, το οποίο θέλουμε να είναι θετικό. Αγνοώντας αριθμούς που είναι υψωμένοι σε άρτια δύναμη, θέλουμε $-6α^7 > 0$, οπότε α < 0. Είναι ακόμα εύκολο να δώσουμε παραδείγματα όπου καμία από τις υπόλοιπες απαντήσεις δεν είναι σωστή. Π.χ. η επιλογή α = -1, β = 1, γ = -1 είναι μία τέτοια περίπτωση (ελέγξτε).

β΄ τρόπος: Αφού οι άρτιες δυνάμεις μη μηδενικών αριθμών είναι θετικές, μπορούμε να αγνοήσουμε όλες τις άρτιες δυνάμεις που εμφανίζονται στους αριθμούς μας. Η υπόθεσή μας τότε ισοδυναμεί με το να είναι ομόσημοι οι –β και αβ. Είναι φανερό, λόγω του «πλην» μπροστά από το β, ότι αυτό απαιτεί ότι α < 0. Τα πρόσημα των β και γ μπορεί να είναι οτιδήποτε, χωρίς να επηρεάζουν την υπόθεση.

9) Γ) 12

Η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2+y^2 = 5^2$, οπότε ψάχνουμε ακεραίους m, n με $m^2+n^2 = 5^2$. Τα τέλεια τετράγωνα στο αριστερό μέλος είναι υποχρεωτικά επιλογή ζευγών από τους αριθμούς 0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 και 5^2 (οι υπόλοιποι ξεπερνούν το 5^2, οπότε μπορούμε να τους αγνοήσουμε). Με απλές δοκιμές μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι, εκτός από την σειρά που εμφανίζονται, έχουμε μόνο τα ζεύγη $0^2+5^2 = 5^2$ και $3^2+4^2 = 5^2$ (το τελευταίο μάς είναι γνωστό από το Πυθαγόρειο Θεώρημα). Άρα πάνω στον κύκλο έχουμε τα σημεία $(0,\pm5)$, $(\pm5,0)$, $(\pm3,\pm4)$ και $(\pm4,\pm3)$, σύνολο 12.

10) Γ) 23

Οι φυσικοί αριθμοί από τον 1 μέχρι τον 20 είναι βέβαια διαιρέτες του γινομένου $A=1\times2\times3\times\ldots\times20$, αφού είναι παράγοντές του. Άρα ο μικρότερος φυσικός αριθμός που ***δεν*** διαιρεί το γινόμενο Α πρέπει να αναζητηθεί στους φυσικούς αριθμούς από τον 21 και πάνω. Ο ίδιος ο 21 διαιρεί το γινόμενο Α καθώς $21 = 3\times7$, και οι 3 και 7 υπάρχουν και στον Α ως παράγοντες. Το ίδιο και ο $22 = 2\times11$. Από την άλλη ο 23 ως πρώτος αριθμός δεν μπορεί να διαιρεί τον Α γιατί τότε η ανάλυση του Α σε πρώτους παράγοντες θα περιείχε και τον 23. Όμως είναι σαφές ότι ο 23 δεν συγκαταλέγεται στους αριθμούς 1 έως 20, ούτε στους πρώτους παράγοντες αυτών των αριθμών. Άρα ο 23 είναι η απάντηση στο ερώτημά μας.

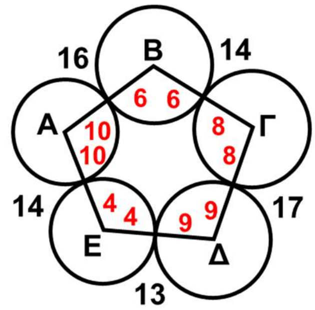
11) Δ) 3

Εξετάζοντας την συνάρτηση, παρατηρούμε ότι έχει τρεις κλάδους, ανάλογα αν x < 0 ή $0 \le x < 2$ ή $x \ge 2$. Για να βρούμε το f(-5) θα προσδιορίσουμε την τιμή της από τον τρίτο κλάδο, αφού -5 < 0.

Εκεί βλέπουμε ότι f(x) = f(x+2), οπότε f(-5) = f(-5+2) = f(-3). Δεν βρήκαμε τελική απάντηση αλλά συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Πάλι από τον τρίτο κλάδο, αφού -3 < 0, έχουμε ότι f(-3) = f(-3+2) = f(-1). Αυτό με την σειρά του δίνει f(-1) = f(-1+2) = f(1). Άλλη μία φορά δεν βρήκαμε τελική απάντηση αλλά συνεχίζουμε με παρόμοιο τρόπο. Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τον δεύτερο κλάδο αφού $0 \leq 1 < 2$, όπου έχουμε f(x) = f(4-x). Θα βρούμε f(1) = f(4-1) = f(3). Τώρα θα τελειώσουμε καθώς 3 > 2, οπότε με χρήση του πρώτου κλάδου έχουμε f(x) = x, που στην περίπτωσή μας δίνει f(3) = 3. Αυτό ολοκληρώνει την άσκηση. Ας προσθέσουμε ότι η παραπάνω λύση είναι αρκετά αναλυτική με επεξήγηση του κάθε βήματος ως προς τους κλάδους. Θα μπορούσε κανείς να την γράψει συνοπτικότερα, αφήνοντας τις άμεσες επεξηγήσεις, ως:

$$f(-5) = f(-5+2) = f(-3) = f(-3+2) = f(-1) = f(-1+2) = f(1) = f(4-1) = f(3) = 3.$$

12) Δ) 10



Αν ρ_α, ρ_β, ρ_γ, ρ_δ και ρ_ε οι ακτίνες των κύκλων με κέντρα τα Α, Β, Γ, Δ και Ε, αντίστοιχα, έχουμε τις παρακάτω εξισώσεις που προκύπτουν από το γεγονός ότι η απόσταση των κέντρων δύο κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά είναι ίσο με το άθροισμα των ακτίνων τους:

$\rho_\alpha+\rho_\beta = 16$, $\rho_\beta+\rho_\gamma = 14$, $\rho_\gamma+\rho_\delta = 17$, $\rho_\delta+\rho_\varepsilon = 13$, $\rho_\varepsilon+\rho_\alpha = 14$.

Η πρόσθεση κατά μέλη και μετά διαίρεση δια 2 δίνει $\rho_\alpha+\rho_\beta+\rho_\gamma+\rho_\delta+\rho_\varepsilon = (16+14+17+13+14):2 = 37$. Τώρα, για το ρ_α αφαιρούμε από την τελευταία τις $\rho_\beta+\rho_\gamma$ και $\rho_\delta+\rho_\varepsilon$. Συγκεκριμένα έχουμε $\rho_\alpha = \rho_\alpha+\rho_\beta+\rho_\gamma+\rho_\delta+\rho_\varepsilon-(\rho_\beta+\rho_\gamma)-(\rho_\delta+\rho_\varepsilon) = 37-14-13 = 10$. Αν θέλουμε μπορούμε να βρούμε και τις υπόλοιπες ακτίνες, οι οποίες έχουν συμπληρωθεί στο σχήμα (το οποίο δεν είναι υπό κλίμακα).

13) Β) 399

Σύμφωνα με την Ευκλείδεια διαίρεση είναι Δ = δπ+υ, όπου $0 \leq \upsilon < \delta$. Εδώ μας δίνεται ότι δ = 20 και επίσης π = υ, οπότε έχουμε Δ = 20υ+υ = 21υ. Η συνθήκη $0 \leq \upsilon < \delta$ γράφεται $0 \leq \upsilon < 20$, που σημαίνει ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει το υ είναι 19. Άρα η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Δ = 21υ είναι $21 \times 19 = 399$.

14) Γ) 4

Διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το αν οι αρχικοί αριθμοί είναι άρτιοι (Α) ή περιττοί (Π). Έχουμε πέντε περιπτώσεις, με 0 έως 4 περιττούς μεταξύ τους, τις οποίες εξετάζουμε χωριστά. α) Οι αριθμοί είναι ΑΑΑΑ (όλοι άρτιοι). Τότε όλα τα αθροίσματα ανά ζεύγη είναι άρτιοι. β) Οι αριθμοί είναι ΠΑΑΑ. Τότε τα αθροίσματα ανά ζεύγη είναι **Π+Α, Π+Α, Π+Α**, Α+Α, Α+Α, Α+Α. Από αυτά περιττοί είναι τα τρία πρώτα. γ) ΠΠΑΑ. Εδώ τα ζεύγη αθροισμάτων είναι Π+Π, **Π+Α, Π+Α, Π+Α, Π+Α,** Α+Α οπότε οι περιττοί είναι τέσσερις. δ) ΠΠΠΑ. Εδώ τα ζεύγη είναι Π+Π, Π+Π, **Π+Α**, Π+Π, **Π+Α, Π+Α**, δηλαδή τρεις περιττοί συνολικά. Τέλος ε) ΠΠΠΠ. Τα ζεύγη είναι όλα Π+Π, που σημαίνει ότι δεν έχουμε κανένα περιττό άθροισμα. Το συμπέρασμα είναι ότι έχουμε το πολύ 4 περιττά αθροίσματα, τα οποία προκύπτουν από την περίπτωση γ).

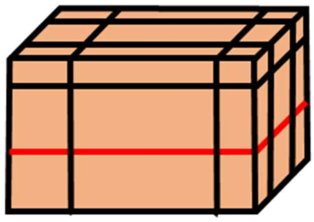
15) Δ) 125

Η ανάλυση του 30^9 σε γινόμενο πρώτων είναι η $30^9 = (2\times3\times5)^9 = 2^9\times3^9\times5^9$. Άρα τα τέλεια τετράγωνα που τον διαιρούν είναι της μορφής $2^{2\alpha}\times3^{2\beta}\times5^{2\gamma}$ με $0 \leq 2\alpha \leq 9$, $0 \leq 2\beta \leq 9$ και $0 \leq 2\gamma \leq 9$. Άρα ο α είναι ένας από τους 0, 1, 2, 3 ή 4, και όμοια οι β και γ. Έχουμε 5 επιλογές για τον καθένα, οπότε το σύνολο των επιλογών μας είναι 5x5x5 = 125.

16) Γ) 5

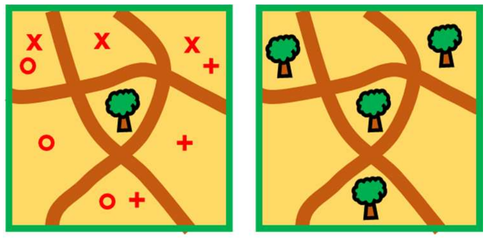
Η ιδέα είναι να γράψουμε τον παρονομαστή του κλάσματος ως δύναμη του 10. Εδώ είναι $\frac{1}{2^{100}} = \frac{5^{100}}{2^{100}\times5^{100}} = \frac{5^{100}}{10^{100}}$. Ο αριθμητής, μετά τις πράξεις της ύψωσης στην εκατοστή δύναμη, λήγει σε 5 γιατί όλοι οι αριθμοί της μορφής 5, 5x5, 5x5x5, 5x5x5x5, … λήγουν σε 5. Είναι τώρα φανερό ότι το παραπάνω κλάσμα στην δεκαδική του μορφή λήγει σε 5. Αν θέλουμε να δούμε μερικά μικρά αριθμητικά παραδείγματα για να αντιληφθούμε καλύτερα την κατάσταση, καταγράφουμε τα: $\frac{5^2}{10^2}=\frac{25}{100}=0,25$, $\frac{5^3}{10^3}=\frac{125}{1000}=0,125$, $\frac{5^4}{10^4}=\frac{625}{10000}=0,625$ και λοιπά.

17) Α) 3S



Έστω ότι τα εμβαδά τριών διαφορετικών εδρών του παραλληλεπιπέδου είναι Α, Β και Γ, αντίστοιχα, οπότε S = 2Α+2Β+2Γ. Μία τομή όπως η κόκκινη στο σχήμα προσθέτει στο εμβαδόν επιφανείας την ποσότητα 2Α, όπου Α είναι το εμβαδόν της έδρας η οποία είναι παράλληλη προς την τομή. Παρατηρούμε ότι η συνολική προσθήκη εμβαδού από τις έξι τομές είναι 4Α+4Β+4Γ = 2S, οπότε το συνολικό εμβαδόν επιφανείας των 27 κομματιών είναι S+2S = 3S.

18) Γ) 3

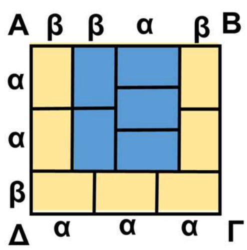


Κοιτάμε το μονοπάτι που διασχίζει το πάρκο από αριστερά προς τα δεξιά. Έχει το κεντρικό δέντρο από την μία του πλευρά, οπότε χρειάζεται τουλάχιστον άλλο ένα δέντρο από την άλλη. Σημειώνουμε με **X** τα πιθανά σημεία του πάρκου όπου μπορεί να φυτευτεί το νέο δέντρο. Κάνουμε αντίστοιχη δουλειά για τα άλλα δύο μονοπάτια σημειώνοντας με **O** ή **+** τις επιλογές μας. Δυστυχώς δεν υπάρχει σημείο και με τα τρία σύμβολα, **X**, **O** και **+**, για να μπορούμε με ένα μόνο δέντρο να πετύχουμε το αποτέλεσμα που θέλουμε. Άρα πρέπει να σκεφτούμε για παραπάνω δέντρα. Μία ουσιαστική παρατήρηση είναι ότι ***το συνολικό πλήθος δέντρων πρέπει να είναι άρτιος αριθμός*** καθώς ένα μονοπάτι έχει ίδιο πλήθος δέντρων από κάθε του πλευρά. Συνεπώς πρέπει να φυτέψουμε 3 ή περισσότερα δέντρα. Ευτυχώς με 3 δέντρα, στα σημεία όπου υπάρχουν δύο από τα σύμβολα **X**, **O** και **+** , μπορούμε να πετύχουμε τον σκοπό μας. Το αποτέλεσμα φαίνεται στον χάρτη παραπάνω, όπου κάθε μονοπάτι έχει από δύο δέντρα στην κάθε του πλευρά.

19) Γ) 7 kg

Δεν εργαζόμαστε με δοκιμές. Το κλειδί είναι κάποιες σκέψεις. Το άθροισμα όλων των βαρών είναι 1+2+3+…+12 = 78 κιλά, οπότε η τρίτη ομάδα έχει συνολικό βάρος 78-41-26 = 11 kg. Παρατηρούμε ότι τα τέσσερα μικρότερα βάρη αθροίζουν σε 1+2+3+4 = 10 kg, οπότε είναι φανερό ότι ο μόνος τρόπος τέσσερα από τα βάρη του μπακάλη να αθροίζουν 11 kg είναι **1+2+3+5** = 11. Επίσης παρατηρούμε ότι τα τέσσερα μεγαλύτερα βάρη αθροίζουν σε 12+11+10+9 = 42 kg, οπότε ο μόνος τρόπος να έχουμε άθροισμα 41 kg είναι **12+11+10+8** = 41. Μένουν αχρησιμοποίητα τα **4+6+7+9** = 26. Η ομάδα που έχει το βάρος των 9 kg είναι η τελευταία. Από τα βάρη στις απαντήσεις, μόνο το βάρος των 7 kg βρίσκεται σε αυτή την ομάδα.

20) Α) $\frac{9}{8}$

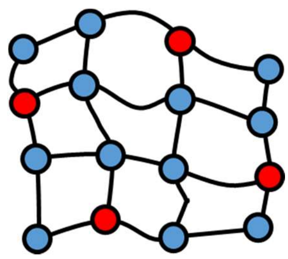


Έστω α και β οι διαστάσεις καθενός από τα μικρά ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Θα βρούμε πρώτα την σχέση των α και β. Για τον σκοπό αυτό υπάρχουν διάφοροι τρόποι. Για παράδειγμα, με βάση το σχήμα, η ισότητα ΑΒ = ΓΔ δίνει 3β+α = 3α και άρα $β = \frac{2}{3}α$. Άλλος τρόπος να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα είναι κοιτώντας το γαλάζιο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Η αριστερή κάθετη πλευρά του είναι 2α, και η ίση της δεξιά κάθετη είναι 3β. Άρα 2α = 3β, όπως πριν. Με αυτά κατά νου έχουμε $\frac{AB}{A\Delta}=\frac{3\beta+\alpha}{2\alpha+\beta}=\frac{2\alpha+\alpha}{2\alpha+\frac{2}{3}\alpha}=\frac{3\alpha}{\frac{8}{3}\alpha}=\frac{9}{8}$.

21) Ε) 9

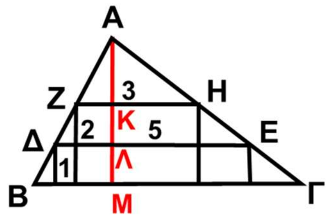
Αφού οι ομάδες ήταν 8 και η καθεμία έπαιξε έναν αγώνα εναντίον κάθε άλλης, το σύνολο των αγώνων ήταν $\frac{1}{2}\times 8\times 7=28$. Σε κάθε αγώνα το σύνολο των βαθμών είναι είτε 3+0 = 3 (περίπτωση νίκης) είτε 1+1 = 2 (περίπτωση ισοπαλίας). Άρα το σύνολο των βαθμών είναι κατ' ελάχιστο $2\times 28=56$ βαθμοί (όλοι οι αγώνες ισοπαλία). Στους δεδομένους αγώνες το σύνολο των βαθμών ήταν 57, δηλαδή 1 παραπάνω από το ελάχιστο. Αυτό σημαίνει ότι υπήρχε ακριβώς μία νίκη, αντί ισοπαλίας, ώστε να δικαιολογηθεί ο παραπάνω βαθμός. Είναι φανερό ότι την νίκη αυτή την κέρδισε η νικήτρια ομάδα, ενώ εκτός από αυτόν τον αγώνα, όλοι οι άλλοι έληξαν με ισοπαλία. Άρα το σύνολο των βαθμών της νικήτριας ομάδας στους 7 αγώνες που έπαιξε, ήταν $3+1\times 6=$ 9. Επαλήθευση: Η νικήτρια ομάδα πήρε 9 βαθμούς, η χαμένη $0+1\times 6=$ 6 και οι 6 υπόλοιπες από 7 βαθμούς η καθεμία (μόνο ισοπαλίες). Το σύνολο των βαθμών είναι 9+6x7+6 = 57.

22) Β) 4



Από τον χάρτη παρατηρούμε ότι κάθε πόλη συνδέεται με το πολύ τέσσερις άλλες, οπότε ένα εργοστάσιο μπορεί να προμηθεύσει ηλεκτρισμό σε 5 το πολύ πόλεις. Αφού 3x5 < 16, σημαίνει ότι 3 εργοστάσια ***δεν*** επαρκούν για να προμηθεύσουν ηλεκτρισμό και στις 16 πόλεις. Άρα χρειαζόμαστε 4 ή περισσότερα εργοστάσια. Στον χάρτη που παραθέτουμε παρατηρούμε ότι 4 εργοστάσια, αυτά που είναι στις κόκκινες πόλεις, επαρκούν για να προμηθεύσουν ηλεκτρισμό σε όλες τις πόλεις. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι κάθε πόλη είτε έχει εργοστάσιο είτε είναι γειτονική σε πόλη με εργοστάσιο.

23) Α) $\frac{7}{2}$



Φέρνουμε το ύψος ΑΜ = h. Έστω ότι τέμνει τις οριζόντιες ΖΗ, ΔΕ στα Κ και Λ, οπότε είναι ΛΜ = 1, ΚΜ = 2. Άρα ΑΚ = ΑΜ-ΚΜ = h-2 και ΑΛ = ΑΜ-ΛΜ = h-1. Από τα όμοια τρίγωνα ΑΖΗ, ΑΔΕ έχουμε $\frac{AK}{ZH}=\frac{A\Lambda}{\Delta E}$, δηλαδή $\frac{h-2}{3}=\frac{h-1}{5}$. Λύνοντας ως προ h θα βρούμε $h=\frac{7}{2}$, που είναι το ζητούμενο.

24) Δ) 674

Έστω Α, Β, Γ και Δ, αντίστοιχα, το πλήθος των καγκουρό που ζουν στα τέσσερα λιβάδια. Έστω ακόμη α, β, γ και δ, αντίστοιχα, το πλήθος των αλόγων στα ίδια λιβάδια. Μας δίνεται, πρώτα απ΄ όλα, η πληροφορία ότι Α+Β+Γ+Δ = 2022 και ζητάμε την τιμή του α+β+γ+δ. Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε τις τέσσερις εξισώσεις

Α = β+γ+δ, Β = γ+δ+α, Γ = δ+α+β και Δ = α+β+γ

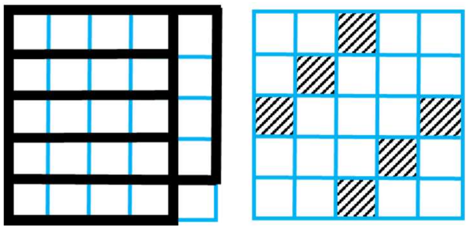
Προσθέτοντας κατά μέλη θα βρούμε Α+Β+Γ+Δ = 3(α+β+γ+δ), οπότε 3(α+β+γ+δ) = 2022. Άρα α+β+γ+δ = 2022:3 = 674, που είναι η απάντηση στο πρόβλημα. Αν θέλουμε να βρούμε παραδείγματα κατάστασης, παρόλο που δεν μας το ζητά η άσκηση, όπου επαληθεύονται τα δεδομένα της εκφώνησης, υπάρχουν πολλά. Πραγματικά, οι εξισώσεις που καταστρώσαμε δίνουν

Α = β+γ+δ = 674–α και όμοια Β = 674–β, Γ = 674-γ και Δ = 674-δ. Οπότε μπορούμε να δώσουμε στα α, β, γ και δ αυθαίρετες τιμές μικρότερες ή ίσες του 674 και να λάβουμε τα αντίστοιχα Α, Β, Γ και Δ. Λόγου χάρη από τα α = β = γ =100 και δ = 374 έχουμε α) στο πρώτο λιβάδι 574 καγκουρό και 100 άλογα, β) στο δεύτερο πάλι 574 καγκουρό και 100 άλογα, γ) όμοια στο τρίτο 574 καγκουρό και 100 άλογα και, τέλος, δ) στο τέταρτο λιβάδι 300 καγκουρό και 374 άλογα. Οπότε όλα μαζί τα καγκουρό είναι 3x574+300 = 2022 (σωστά) και εύκολα επαληθεύουμε τις υπόλοιπες συνθήκες.

25) Ε) κανένα από τα προηγούμενα

Παρατηρούμε ότι αν το α είναι μία ρίζα της εξίσωσης, δηλαδή αν ικανοποιείται η ισότητα $(\alpha^2+1)(2^{\alpha}+2^{-\alpha}) = 20\alpha^2$, τότε και η –α είναι ρίζα της. Αυτό συμβαίνει γιατί οι παραστάσεις α^2+1, $2^{\alpha}+2^{-\alpha}$ και $20\alpha^2$ δεν αλλάζουν τιμή αν αντικαταστήσουμε το α με –α. Πραγματικά $(-\alpha)^2+1 = \alpha^2+1$, $2^{-\alpha}+2^{\alpha} = 2^{\alpha}+2^{-\alpha}$ και $20(-\alpha)^2 = 20\alpha^2$. Παρατηρούμε ακόμα ότι η 0 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης (άμεσο με έλεγχο), οπότε οι τέσσερις ρίζες που βρήκε ο κύριος Τζίνης είναι της μορφής α, β, -α, -β. Το άθροισμά τους είναι βέβαια 0, άσχετα αν θα μπορούσαμε να βρούμε ή όχι την αριθμητική τιμή των ριζών.

26) Β) 6

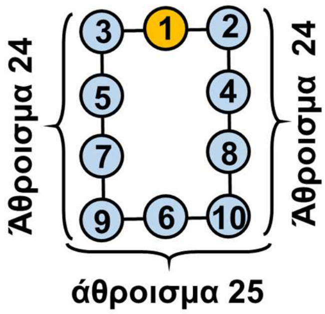


Εξετάζουμε τα έξι 1x4 ορθογώνια στο εσωτερικό του 5x5 τετραγώνου που είναι οριοθετημένα με παχύ πλαίσιο. Αυτά δεν επικαλύπτονται και πρέπει το καθένα να περιέχει τουλάχιστον ένα χρωματισμένο κελί. Άρα τα χρωματισμένα κελιά πρέπει να είναι τουλάχιστον 6. Από την άλλη στο δεύτερο σχήμα παρατηρούμε ότι τα 6 σκιασμένα κελιά ικανοποιούν την συνθήκη του προβλήματος (ο έλεγχος είναι άμεσος). Το γεγονός αυτό δείχνει ότι χρειαζόμαστε το πολύ 6 χρωματισμένα κελιά. Τα δύο συμπεράσματα μαζί δείχνουν ότι ο ελάχιστος αριθμός για να πετύχουμε το ζητούμενο της άσκησης είναι 6.

27) Γ) 2Ν

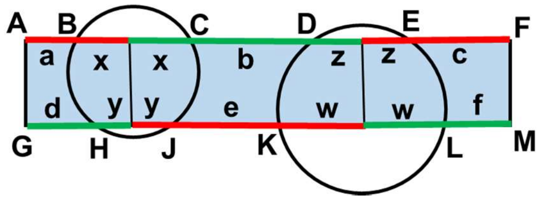
Η ιδέα είναι να βρούμε δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς ανάμεσα στους οποίους βρίσκεται ο $\sqrt{N^2+N+1}$, και όμοια για τον $\sqrt{9N^2+N+1}$. Για τον πρώτο εύκολα βλέπουμε με ύψωση στο τετράγωνο ότι ισχύουν οι ανισότητες $N<\sqrt{N^2+N+1}<N+1$. Αντίστοιχα για τον δεύτερο ισχύουν οι $3N<\sqrt{9N^2+N+1}<3N+1$. Τώρα είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τους φυσικούς αριθμούς μεταξύ των δύο ριζικών. Είναι φανερό ότι οι φυσικοί αριθμοί μεταξύ τους είναι οι Ν+1 έως 3Ν (μας το λέει η δεξιά ανισότητα για την μικρότερη από τις δύο ρίζες και η αριστερή για την μεγαλύτερη). Άρα το πλήθος των αριθμών στο ενδιάμεσο είναι 3Ν-(Ν+1)+1 = 2Ν.

28) Ε) κανένα από τα προηγούμενα



Θα δούμε ότι στον σημειωμένο κύκλο πάει υποχρεωτικά ο 1. Για να λύσουμε την άσκηση δεν εργαζόμαστε με δοκιμές αλλά χρησιμοποιούμε μία ωραία παρατήρηση: Το μέγιστο δυνατό άθροισμα των αθροισμάτων των αριθμών στις δύο στήλες και στην κάτω οριζόντια γραμμή, όπου εμφανίζονται 9 αριθμοί από τους οποίους οι δύο γωνιακοί επαναλαμβάνονται, είναι (2+3+4+5+6+7+8+9+10)+(9+10) = 73. Αλλά το ίδιο αυτό άθροισμα από το σχήμα της άσκησης είναι 24+25+24 = 73, δηλαδή το ίδιο με πριν. Αυτή η παρατήρηση είναι ουσιαστική. Σημαίνει ότι στους 9 κύκλους υπάρχει μόνο μία επιλογή αριθμών, και συγκεκριμένα οι αριθμοί 2 έως 10 με τους 9 και 10 να είναι στους γωνιακούς κύκλους (μέγιστο άθροισμα). ***Ο αριθμός που περισσεύει είναι ο 1, ο οποίος υποχρεωτικά μπαίνει στον κίτρινο κύκλο***. Αν θέλουμε να δούμε διευθέτηση των αριθμών 1 έως 10 όπως το απαιτεί η άσκηση, παραθέτουμε το παραπάνω σχήμα. Δεν είναι δύσκολο να συμπληρωθεί καθώς οι 9 και 10 είναι στα δύο κάτω γωνιακά. Το κάτω μεσαίο είναι υποχρεωτικά το 25-9-10 = 6. Στην αριστερή στήλη οι τρεις πάνω κύκλοι πρέπει να έχουν άθροισμα 24-9 = 15 (οπότε ο ένας πρέπει να είναι περιττός) και οι τρεις πάνω δεξιά πρέπει να έχουν άθροισμα 24-10 = 14. Σε αυτούς πρέπει να μοιράσουμε τους αριθμούς 2 έως 8, που είναι απλό θέμα.

29) A) 16



Αν, γενικότερα, τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων εξωτερικά των κύκλων είναι a, b, c, d, e και f, όπως στο σχήμα, θα δείξουμε ότι **a+e+c = d+b+f**. Για τον σκοπό αυτό φέρνουμε την μεσοκάθετο της χορδής BC. Αυτή διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και άρα είναι μεσοκάθετος της απέναντι παράλληλης χορδής HJ. Ονομάζουμε x τα δύο ίσα μέρη της χορδής BC και, αντίστοιχα, y τα δύο ίσα μέρη της χορδής HJ. Όμοια εργαζόμαστε με τις χορδές DE και KL, όπου τα δύο ίσα τμήματά τους είναι τα z και w. Παρατηρούμε τώρα ότι το άθροισμα των κόκκινων τμημάτων έχει μήκος όσο το άθροισμα των πράσινων (φανερό από το σχήμα). Άρα (a+x)+(y+e+w)+(z+c) = (d+y)+(x+b+z)+(w+f). Μετά την απλοποίηση των προσθετέων που εμφανίζονται και στις δύο πλευρές μένει η αποδεικτέα a+e+c = d+b+f. Στην περίπτωσή μας είναι 8+24+22=12+26+LM, οπότε LM = 16.

30) E) κανένα από τα προηγούμενα

10			10			10			10			10			7		
A	…	A	Σ	…	Σ	Σ	…	Σ	Σ	…	Σ	Σ	…	Σ	Σ	…	Σ
Σ	…	Σ	A	…	A	Σ	…	Σ	Σ	…	Σ	Σ	…	Σ	Σ	…	Σ
Σ	…	Σ	Σ	…	Σ	A	…	A	Σ	…	Σ	Σ	…	Σ	Σ	…	Σ
Σ	…	Σ	Σ	…	Σ	Σ	…	Σ	A	…	A	Σ	…	Σ	Σ	…	Σ
Σ	…	Σ	Σ	…	Σ	Σ	…	Σ	Σ	…	Σ	A	…	A		…	
10			10			10			10			10			7		

Έστω X το πλήθος των γραμμών και Y το πλήθος των στηλών των καθισμάτων του σταδίου, όπου Y > X. Το πρόβλημα μας δίνει ότι οι οπαδοί των Αθηναίων είναι 10X και των Σπαρτιατών 4Y. Επειδή όλα τα καθίσματα είναι XY και επειδή 7 από τα καθίσματα είναι άδεια συμπεραίνουμε ότι ισχύει η ισότητα XY = 10X+4Y+7. Από εδώ και πέρα μπορούμε να προχωρήσουμε με δύο (παρεμφερείς) τρόπους.

α΄ τρόπος: Λύνοντας την εξίσωση ως προς X θα βρούμε $X=\frac{4Y+7}{Y-10}=4+\frac{47}{Y-10}$. Επειδή το X είναι ακέραιος σημαίνει ότι πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός το κλάσμα που εμφανίστηκε, δηλαδή το Y-10 πρέπει να είναι διαιρέτης του 47. Άρα το Y-10 ισούται ± 1 ή ± 47. Τις περιπτώσεις -1 ή -47 τις απορρίπτουμε γιατί δίνουν X<0 και Y<0, αντίστοιχα. Μένουν οι Y-10 = 1 ή Y-10 = 47 που δίνουν τις λύσεις (X = 51, Y=11) και (X = 5, Y = 57). Κρατάμε την δεύτερη αφού απαιτούμε Y > X. Παραλλαγή αυτής της μεθόδου είναι ο **β΄ τρόπος:** Η XY = 10X+4Y+7 γράφεται (X-4)(Y-10) = 47. Οπότε είναι (X-4 = 1 και Y–10 = 47) ή (X-4 = 47 και Y-10 = 1), από όπου συνεχίζουμε όπως πριν. Συνοψίζοντας, βρήκαμε X = 5, Y = 57, οπότε τα καθίσματα είναι XY = 5×57 = 612, που ταιριάζει με την απάντηση (E). Αν θέλουμε να δούμε μία διάταξη όπως δηλώνουν τα δεδομένα της άσκησης, παραθέτουμε το παραπάνω σχήμα το οποίο έχει διαστάσεις 5×57. Οι Αθηναίοι είναι σε δεκάδες οριζοντίως (πράσινο χρώμα), οι Σπαρτιάτες είναι σε τετράδες καθέτως και οι 7 κενές θέσεις είναι κάτω δεξιά.