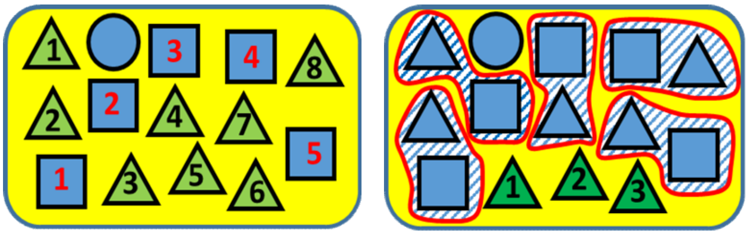
Αιτιολογημένες λύσεις στα θέματα Δημοτικού του Διαγωνισμού "Καγκουρό 2022"

Β΄ Δημοτικού

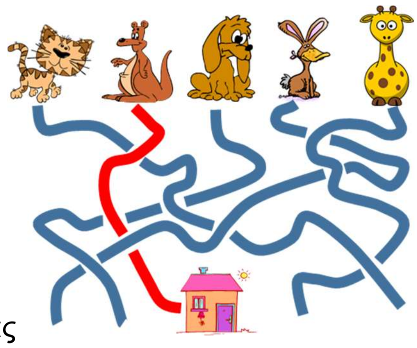
1) Δ)
Το κουτί (Δ) έχει πέντε φρούτα ενώ τα υπόλοιπα έχουν από τέσσερα.

2) Γ) 3



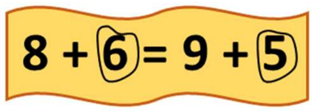
Στην εικόνα υπάρχουν 8 τρίγωνα και 5 τετράγωνα. Οπότε έχουμε 8-5=3 περισσότερα τρίγωνα από τετράγωνα. **Άλλος τρόπος** να σκεφτούμε, για να αποφύγουμε το μέτρημα, είναι να ζευγαρώσουμε τα τρίγωνα και τα τετράγωνα (εικόνα δεξιά). Θα δούμε τότε ότι περισσεύουν 3 τρίγωνα (τα πράσινα).

3) Β)

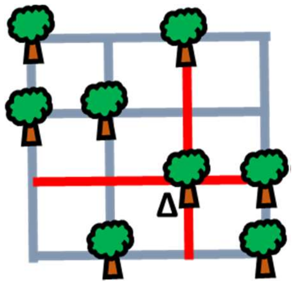


Είναι ευκολότερο να βρούμε την διαδρομή αρχίζοντας από το σπίτι και πηγαίνοντας προς τα πίσω. Στο σχήμα η διαδρομή είναι σημειωμένη με κόκκινο χρώμα.

4) Ε) 6 και 5
Μπορούμε να κάνουμε έλεγχο όλων των περιπτώσεων που μας δίνονται. Στο τέλος θα διαπιστώσουμε ότι μόνο η απάντηση (Ε) δίνει σωστό αποτέλεσμα, που είναι άθροισμα 14 και στις δύο προσθέσεις. Ένας πιο γρήγορος τρόπος να σκεφτούμε είναι ο εξής: Αφού ο αριθμός που φαίνεται στην δεξιά πλευρά είναι κατά 1 μεγαλύτερος από τον αριθμό αριστερά, πρέπει οι δύο αριθμοί στις θέσεις που είναι το μελάνι να διαφέρουν κατά 1. Ακριβέστερα, πρέπει ο αριθμός στην αριστερή μελανιά να είναι κατά 1 μεγαλύτερος από τον αριθμό στην δεξιά. Από τις απαντήσεις που δίνονται, μόνο η (Ε) έχει αυτή την ιδιότητα.

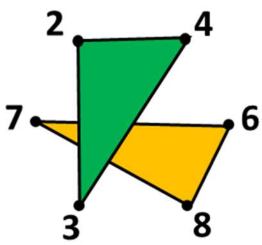


5) Δ) στο Δ



Τα δύο κόκκινα μονοπάτια της εικόνας έχουν από ένα μόνο δέντρο ενώ όλα τα άλλα έχουν από δύο. Οπότε το δέντρο πρέπει να μπει στο σημείο που διασταυρώνονται, δηλαδή στο σημείο Δ. Μπορεί τώρα κανείς να ελέγξει ότι όλα τα οριζόντια και όλα τα κάθετα μονοπάτια έχουν από δύο δέντρα.

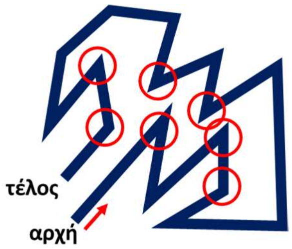
6) Δ)



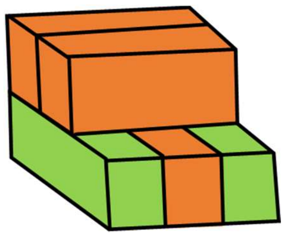
Οι τελίτσες που έχουν δίπλα τους αριθμό μεγαλύτερο του 5 είναι οι 6, 7 και 8. Με αυτές σχεδιάζουμε το κίτρινο τρίγωνο. Με τις υπόλοιπες, δηλαδή τις 2, 3 και 4, σχεδιάζουμε το πράσινο τρίγωνο.

7) Α) γαλάζιο
Το πρόβλημα μας λέει ότι ο μαθητής έβαψε 1 από τους κύβους με κίτρινο χρώμα, 1 με πράσινο, 1 με μαύρο και 5 με κόκκινο. Αν προσέξουμε στο σχήμα θα δούμε ότι όλοι αυτοί οι κύβοι φαίνονται στην εικόνα. Με άλλα λόγια δεν είναι κρυμμένοι. Αφού, σύμφωνα με το πρόβλημα, ***όλοι*** οι υπόλοιποι κύβοι είναι γαλάζιοι, σημαίνει ότι ο κύβος που δείχνει το βέλος, όπως και οι κρυμμένοι κύβοι, είναι γαλάζιοι.

8) Γ) 7
Το αυτοκίνητο έστριψε προς τα δεξιά 7 φορές. Στο σχήμα είναι σημειωμένες με κύκλο οι 7 γωνίες στις οποίες έκανε στροφή προς τα δεξιά.



9) Γ) 2
Το καθένα από τα δύο πράσινα τούβλα ακουμπάει ακριβώς 3 άλλα τούβλα, ένα πλάι του και δύο από πάνω του. Τα υπόλοιπα ακουμπάνε, το καθένα, 4 άλλα τούβλα. Για παράδειγμα το κοντινό μας πάνω τούβλο ακουμπάει στο άλλο πάνω τούβλο και στα 3 κάτω.



10) Γ)
Αν αρχίσουμε από τον μικρό δίσκο στην κορυφή και κοιτάξουμε προς τα κάτω, θα δούμε ότι οι δίσκοι έχουν με την σειρά χρώμα Γαλάζιο, Λευκό, Γαλάζιο, Γαλάζιο, Λευκό και Γαλάζιο. Από τα σχήματα στις απαντήσεις, μόνο το (Γ) ακολουθεί αυτή την σειρά πηγαίνοντας από μέσα προς τα έξω.

11) Ε)
Είναι εύκολο να καταλάβουμε ποια είναι η διαφορετική φωτογραφία: Παρατηρούμε ότι ο τροχός (Ε) έχει 6 γαλάζιους κύκλους ενώ οι άλλοι έχουν 5. Αν θέλουμε, μπορούμε να ελέγξουμε ότι οι υπόλοιποι τροχοί είναι ίδιοι, απλά ο δίσκος έχει κάνει κάποια στροφή.

12) Ε) 30
Το σημείο που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι, σύμφωνα με το πρόβλημα, όσο νερό μπαίνει στην λίμνη από τα ποτάμια, άλλο τόσο βγαίνει. Τα τρία από τα ποτάμια φέρνουν συνολικά 12+13+20 = 45 κιλά νερό κάθε δευτερόλεπτο. Το τέταρτο ποτάμι βγάζει 15 κιλά νερό το δευτερόλεπτο οπότε μένουν 45-15 = 30 κιλά νερό το δευτερόλεπτο για το τελευταίο ποτάμι.

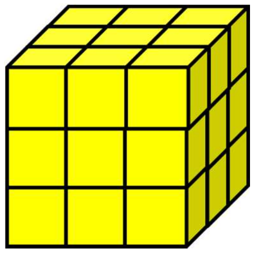
13) Γ)
Το πρόβλημα μας λέει ότι το τρίγωνο μπήκε πριν το τετράγωνο και ο κύκλος μετά το τετράγωνο. Από τα σχέδια που μας δίνονται, μόνο στο (Γ) βλέπουμε αυτή την διάταξη. Στα υπόλοιπα είτε το τρίγωνο ***δεν*** είναι πριν το τετράγωνο ή ο κύκλος ***δεν*** είναι μετά το τετράγωνο, άρα αποκλείονται.

14) Α) 7 κιλά
Παρατηρούμε ότι όταν στην πρώτη ζυγαριά προστέθηκε ένας κύλινδρος, τότε το βάρος αυξήθηκε κατά 17-12 = 5 κιλά. Άρα ο κύλινδρος ζυγίζει 5 κιλά. Από το πρώτο ζύγισμα συμπεραίνουμε ότι ο κύβος ζυγίζει 12-5 = 7 κιλά.

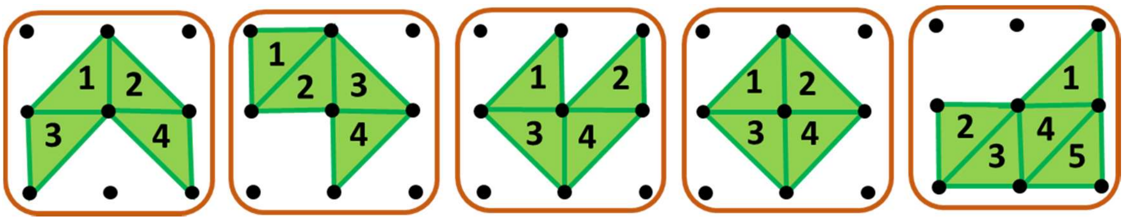
15) Β) 14 κιλά
Ξέρουμε ότι το ποντίκι ζυγίζει **1 κιλό**. Αφού ο σκύλος ζυγίζει 7 κιλά περισσότερο από το ποντίκι, σημαίνει ότι ζυγίζει 1+7 = **8 κιλά**. Αφού η γάτα ζυγίζει 3 κιλά λιγότερα από τον σκύλο, σημαίνει ότι η ίδια ζυγίζει 8-3 = **5 κιλά**. Οπότε τα τρία ζώα μαζί ζυγίζουν 1+8+5 = 14 κιλά.

16) Γ) 16
Ένας τρόπος (παρακάτω θα δούμε έναν καλύτερο) είναι να σβήσουμε έναν από τους πέντε αριθμούς, μετά να προσθέσουμε τους υπόλοιπους και να ελέγξουμε αν το άθροισμά τους είναι 70. Αν είναι, τελειώσαμε, αλλιώς σβήνουμε έναν άλλο από τους αριθμούς και κάνουμε ξανά την ίδια διαδικασία από την αρχή. Αργά ή γρήγορα θα βρούμε τον ζητούμενο. Ο τρόπος αυτός, αν και σωστός, είναι κοπιαστικός με μεγάλη επανάληψη των ίδιων βημάτων. Είναι καλύτερο να κάνουμε έναν πιο σβέλτο τρόπο. **Καλύτερη μέθοδος**: Προσθέτουμε ***όλους*** τους αριθμούς. Θα βρούμε 11+13+16+22+24 = 86. Το άθροισμα αυτό είναι 86-70 = 16 μονάδες μεγαλύτερο από το ζητούμενο, που είναι όσο ένας από τους αριθμούς. Άρα πρέπει να σβήσουμε τον 16, και οι υπόλοιποι θα έχουν το σωστό άθροισμα, δηλαδή 70. Αν θέλουμε να κάνουμε έλεγχο, αν και περιττεύει, έχουμε 11+13+22+24 = 70.

17) Δ) 12 σκύλοι
Στην αρχή οι σκύλοι και οι γάτες ήταν 20 οπότε όταν ήλθαν οι 4 καινούργιες γάτες έγιναν 20+4 = 24. Αφού οι σκύλοι είναι τώρα όσες οι γάτες, σημαίνει ότι είναι από 12, αφού 12+12 = 24.

18) Α) 19

Πρώτα απ' όλα μετράμε πόσοι μικροί κύβοι χρειάζονται για να φτιάξουμε τον μεγάλο κύβο χρησιμοποιώντας μόνο κίτρινους κύβους. Μετρώντας από το σχήμα θα δούμε ότι θέλουμε 9 για την οροφή, οπότε συνολικά για τους τρεις ορόφους θέλουμε 9+9+9 = 27 μικρούς κίτρινους κύβους. Τώρα, αν χρησιμοποιήσουμε το γαλάζιο και το κόκκινο τούβλο, θα χρειαστούμε 5+3 = 8 λιγότερους κίτρινους κύβους. Άρα οι υπόλοιποι 27-8 = 19 είναι κίτρινοι.

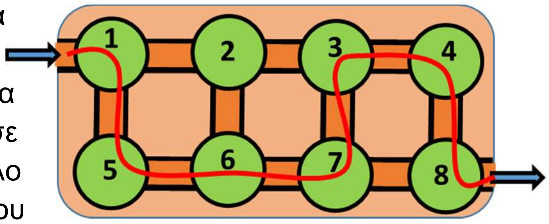
19) Ε)
Χωρίζουμε τους κήπους σε ίσα τρίγωνα, όπως στην εικόνα παρακάτω. Θα παρατηρήσουμε ότι οι τέσσερις πρώτοι κήποι αποτελούνται από 4 ίδια τρίγωνα ενώ ο τελευταίος από 5. Δηλαδή ο (Ε) είναι ο πιο μεγάλος.



20) Β) 3 κιλά και 7 κιλά
Όλα μαζί τα καγκουρό ζυγίζουν 3+4+5+7+8 = 27 κιλά. Αφού τρία από αυτά ζυγίζουν 17 κιλά, σημαίνει ότι τα άλλα δύο μαζί ζυγίζουν 27-17 = 10 κιλά. Από τα βάρη που μας δίνουν, δηλαδή τα 3, 4, 5, 7 και 8 κιλά, ***ο μόνος τρόπος*** να βρούμε δύο καγκουρό με συνολικό βάρος 10 κιλά είναι 3+7 = 10. Οπότε τα δύο άλλα καγκουρό ζυγίζουν 3 κιλά και 7 κιλά.

21) Γ) 34 μήλα

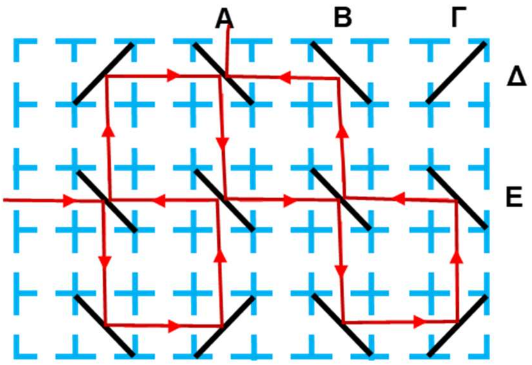
Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι ο κηπουρός δεν μπορεί να περάσει από όλα τα σημεία όπου υπάρχουν μήλα, χωρίς να περάσει δύο φορές από κάποιο σημείο. Άρα θα αφήσει έξω κάποια μήλα. Τα λιγότερα που θα μπορούσε να αφήσει είναι 2 μήλα (το σημείο όπου υπάρχει 1 μήλο δεν μπορεί να το αφήσει γιατί είναι το πρώτο μέρος που συναντάει όταν μπει στον κήπο). Στην εικόνα βλέπουμε μία διαδρομή που δείχνει πώς να περάσει τον κήπο αφήνοντας μόνο τα 2 μήλα. Άρα θα μαζέψει 1+3+4+5+6+7+8 = 34 μήλα.

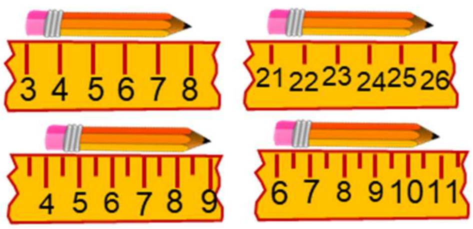


Γ΄ και Δ΄ Δημοτικού Επίπεδο 1

1) Α) το Α

Η εικόνα παρακάτω δείχνει όλη την πορεία της ακτίνας, η οποία θα βγει από το Α.





2) Ε) 4

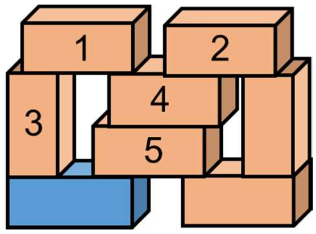
Και τα τέσσερα μολύβια έχουν μήκος 5 εκατοστά. Στην εικόνα πάνω δεξιά προσθέσαμε τα νούμερα που λείπουν από τους χάρακες, ώστε να είναι πιο ορατό το μέτρημα. Για να βρει κανείς το μήκος του κάθε μολυβιού, μπορεί είτε να μετρήσει τα εκατοστά από την μία άκρη ως την άλλη άκρη του μολυβιού είτε να κάνει αφαίρεση αριθμών. Για παράδειγμα για το μολύβι στον πρώτο χάρακα, οι άκρες βρίσκονται στα νούμερα 3 και 8, οπότε το μήκος του είναι 8-3 = 5 εκατοστά. Όμοια οι άλλες περιπτώσεις.

3) Δ)

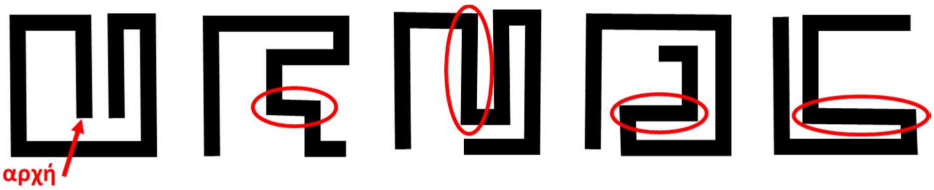
Τα μόνα σπίτια με δύο πόρτες είναι τα (Β) και (Ε), οπότε σε αυτά τα δύο ζουν ο Αντώνης και η Βάσω. Τα μόνα σπίτια με ένα παράθυρο είναι τα (Α) και (Γ), οπότε σε αυτά τα δύο ζουν η Γιάννα και η Δήμητρα. Μένει το σπίτι (Δ) για τον πέμπτο φίλο.

4) Γ) 5

Για να φτάσει ο μάστορας στο γαλάζιο τούβλο πρέπει να βγάλει τα πέντε αριθμημένα τούβλα. Η σειρά αρίθμησης είναι ένας τρόπος (υπάρχουν και άλλοι) που δείχνει με ποια σειρά μπορεί να τα βγάλει.

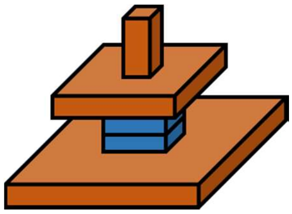


5) Α)



Ο κύριος Σαράβαλος μπορεί να την κάνει όλη την διαδρομή (Α) αρχίζοντας από το σημειωμένο σημείο και στρίβοντας μόνο αριστερά. Τις άλλες διαδρομές ***δεν μπορεί*** να τις κάνει από όποια άκρη και αν αρχίσει. Στην εικόνα έχουμε σημειώσει ζευγάρια σημείων που θα χρειαστεί να κάνει την μια φορά αριστερή στροφή και την άλλη δεξιά, από όπου και αν έρχεται. Οπότε αυτές τις διαδρομές δεν μπορεί να τις τελειώσει χωρίς να στρίψει το τιμόνι του και προς τα αριστερά και προς τα δεξιά.

6) Δ)

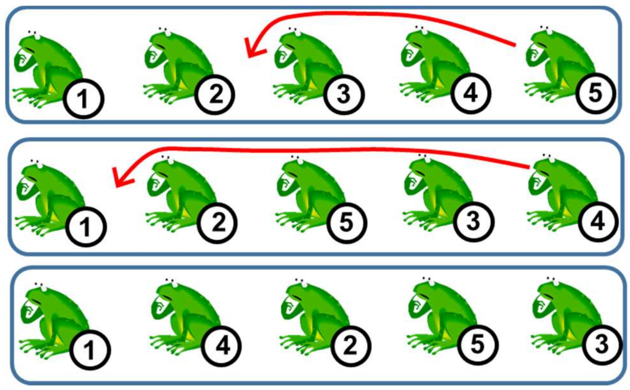


Από τα διάφορα επίπεδα που έχει ο πύργος, από ψηλά φαίνονται μόνο όσα είναι χρωματισμένα καφέ. Τα γαλάζια, για παράδειγμα, είναι κρυμμένα από την μεσαία πλάκα. Η ίδια πλάκα κρύβει και ένα μέρος της βάσης. Με λίγη τρισδιάστατη φαντασία, μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι η σωστή απάντηση είναι η (Δ).

7) Ε) 20

Αντί να μετρήσουμε πόσα τετράγωνα έχουν μελάνι είναι πιο εύκολο να μετρήσουμε πόσα είναι τα τετράγωνα ***χωρίς μελάνι*** και να τα αφαιρέσουμε από το πλήθος όλων των τετραγώνων. Είναι φανερό ότι τα μόνα τετράγωνα χωρίς μελάνι είναι τα 4 γωνιακά ενώ όλα τα τετράγωνα είναι 4x6 = 24. Άρα τα τετράγωνα που έχουν μελάνι είναι 24-4 = 20.

8) Β) 2



Δεν προσπαθούμε να λύσουμε την άσκηση με το μυαλό, αλλά με χρήση ενός μολυβιού σημειώνουμε τα βήματα που μας περιγράφει η άσκηση. Θα προκύψουν τα σχέδια που βλέπουμε στην εικόνα, από όπου καταλαβαίνουμε ότι ο βάτραχος που στο τέλος είναι τρίτος στη σειρά, είναι ο 2.

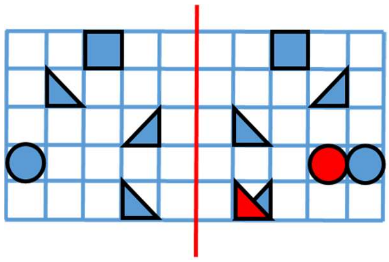
9) Γ) μία ώρα

Η διαδρομή γύρω από τον μικρό κήπο έχει μήκος 3+3+3+3 = 12 μέτρα και γύρω από τον μεγαλύτερο έχει μήκος 4+8+4+8 = 24 μέτρα. Δηλαδή η δεύτερη διαδρομή είναι διπλάσια της πρώτης (αφού 2x12 = 24). Αφού το σκαθάρι θέλει 30 λεπτά να πάει γύρω από την μικρή διαδρομή, θα χρειαστεί 2x30 = 60 λεπτά για την διπλάσια. Αλλά τα 60 λεπτά είναι μία ώρα, οπότε η σωστή απάντηση είναι η (Γ).

10) Δ) 9

Δεν μπορεί να διαλέξει τον 10 ή τον 12 γιατί οι άλλες δύο κάρτες θα έχουν άθροισμα 1+3 ***ή παραπάνω*** (επειδή οι 1 και 3 είναι οι μικρότεροι από τους αριθμούς στις κάρτες) οπότε οι τρεις μαζί θα είχαν άθροισμα 10+1+3 = 14 ή παραπάνω, που ξεπερνά το 13. Οπότε σκεπτόμαστε με πιο μικρό αριθμό. Ο 9 είναι καλή επιλογή γιατί μαζί με τους 1 και 3 το άθροισμα είναι 9+1+3 = 13, όπως θέλουμε. Αυτό μας αρκεί για την απάντηση γιατί κάθε άλλη επιλογή, αν υπάρχει, θα είναι με αριθμούς μικρότερους από το 9. Στην πραγματικότητα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι δεν υπάρχει άλλη επιλογή (χωρίς το 9) γιατί με δοκιμές βλέπουμε ότι με τρεις από τους 1, 3, 6, 7 αποκλείεται να έχουμε άθροισμα 13.

11) Γ) 3



Στην εικόνα βλέπουμε τα σχήματα στο αριστερό μέρος της εικόνας και τα συμμετρικά τους στο δεξί μέρος. Όλα αυτά είναι χρωματισμένα με γαλάζιο χρώμα. Τα δύο κόκκινα σχήματα ***δεν είναι συμμετρικά ως προς τον κόκκινο άξονα*** κάποιου σχήματος αριστερά. Τα υπόλοιπα τρία είναι ζευγάρια από συμμετρικά σχήματα.

12) Ε) 12334

Ο αριθμός της Δασκάλας έχει ***το τρίτο και το τέταρτο ψηφίο ίδια, ενώ τα υπόλοιπα είναι διαφορετικά***. Άρα αποκλείεται ο αριθμός της Δασκάλας να είναι ο (Α) 13324 γιατί τα ίδια ψηφία είναι σε άλλη θέση. Αποκλείεται να είναι ο (Β) 12345 γιατί δεν έχει ίδια ψηφία. Δεν είναι ο (Γ) γιατί έχει δύο ζευγάρια από ίδια ψηφία και δεν είναι ο (Δ) 12333 γιατί έχει τρία ίδια ψηφία. Από την άλλη, ο (Ε) 12334 είναι σωστός γιατί έχει ***το τρίτο και το τέταρτο ψηφίο ίδια, ενώ τα υπόλοιπα είναι διαφορετικά.***

13) Β) 7

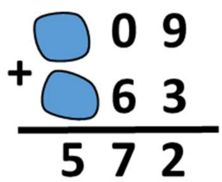
α΄ τρόπος: Όλα μαζί τα σακιά ζυγίζουν 5+7+8+12+13+15 = 60 κιλά. Άρα αν τα μοιράσουμε σε τρεις ομάδες με το ίδιο βάρος, κάθε μία πρέπει να ζυγίζει 60:3 = 20 κιλά. Συμπεραίνουμε ότι το σακί των 13 κιλών πρέπει να μπει μαζί με των 20-13 = 7 κιλών.

β΄ τρόπος: Είναι φανερό ότι το πιο βαρύ σακί (εκείνο των 15 κιλών) πρέπει να πάει με το πιο ελαφρύ (των 5 κιλών) γιατί αλλιώς το σακί των 5 κιλών θα πήγαινε με ένα πιο ελαφρύ από το 15 κιλών (δηλαδή το πιο βαρύ). Αλλά αυτό δεν γίνεται γιατί δύο σακιά αντίστοιχα ελαφρύτερα από δύο άλλα δεν μπορεί να έχουν το ίδιο συνολικό βάρος (έχουν σίγουρα λιγότερο). Άρα το σακί των 15 κιλών πρέπει να πάει με των 5 κιλών. Τα αφαιρούμε αυτά, οπότε μένουν τα σακιά των 7, 8, 12 και 13 κιλών. Για τον ίδιο λόγο το σακί των 13 κιλών πρέπει να πάει με των 7. Μένουν τα σακιά των 12 και 8 κιλών. Επαλήθευση: 15+5 = 13+7 = 12+8 (όλα 20).

14) Β) 3

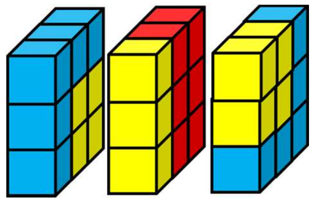
Αν δεν μας νοιάζει η σειρά με την οποία πολλαπλασιάζουμε αριθμούς, έχουμε μόνο δύο τρόπους να βρούμε γινόμενο 9 πολλαπλασιάζοντας δύο αριθμούς, τον 1x9 = 9 και τον 3x3 = 9. Με την πρώτη περίπτωση μπορούμε να φτιάξουμε ***δύο*** διψήφιους με γινόμενο 9, τους 19 και 91. Με την δεύτερη περίπτωση έχουμε έναν διψήφιο, τον 33. Τελικά ο κύριος Αριθμόπουλος βρήκε ακριβώς τρεις διψήφιους με γινόμενο ψηφίων 9, συγκεκριμένα τους 19, 91 και 33.

15) Α) 14



Είναι φανερό ότι το ψηφίο των μονάδων που λείπει είναι το 9 για να είναι σωστή η πρόσθεση 9+3 = 12 (δηλαδή 2, και 1 το κρατούμενο). Λόγω του κρατούμενου συμπεραίνουμε ότι το ψηφίο των δεκάδων που λείπει είναι το 0, για να είναι σωστή η πρόσθεση 0+6+1=7. Τα άλλα δύο κρυμμένα ψηφία πρέπει να έχουν άθροισμα 5. Υπάρχουν διάφοροι συνδυασμοί, όπως 1+4 ή 4+1, που μας δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, αλλά ***δεν μας ενδιαφέρει ποιος ακριβώς***. Μας αρκεί ότι το άθροισμά τους είναι 5. Έτσι το άθροισμα των τεσσάρων ψηφίων είναι όσο το 5+0+9 = 14 (όπου το 5 προκύπτει από τα δύο κρυμμένα ψηφία).

16) Ε) 11



Ο μάστορας χρησιμοποίησε δύο τούβλα όπως το γαλάζιο και δύο όπως το κόκκινο, ενώ τα υπόλοιπα είναι κίτρινα. Στο σχήμα φαίνεται ο κύβος χωρισμένος σε τρεις φέτες, ώστε να έχει κανείς καλύτερη εικόνα του εσωτερικού. Τα γαλάζια και τα κόκκινα τούβλα αποτελούνται από 5+5+3+3 = 16 μικρούς κύβους και επειδή όλοι μαζί οι κύβοι είναι 3x3x3 = 27, σημαίνει ότι τα κίτρινα τούβλα είναι 27-16 = 11 σε αριθμό.

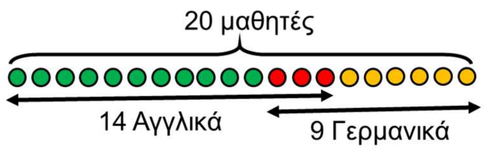
17) Α) 9

Ο πιο μικρός τριψήφιος ξεκινά από 1, οπότε ας εξετάσουμε αν υπάρχει τριψήφιος που ξεκινά από 1, δηλαδή είναι της μορφής 1 - - , και ο οποίος να έχει άθροισμα ψηφίων 19. Σε αυτή την περίπτωση τα άλλα δύο ψηφία πρέπει να έχουν άθροισμα 19-1 = 18. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε ως 18 = 9+9, και μάλιστα αυτός είναι ο μόνος τρόπος γιατί τα άλλα πιθανά ζευγάρια αριθμών έχουν άθροισμα το πολύ 9+8 = 17. Άρα ο μόνος τριψήφιος που ξεκινά από 1 και έχει άθροισμα ψηφίων 19 είναι ο 199. Συνεπώς το ψηφίο των δεκάδων είναι το 9.

18) Ε) 12

Εξετάζοντας τους μικρούς κύβους της κατασκευής θα διαπιστώσουμε ότι ***όλοι*** τους (δηλαδή και οι 12) είναι βαμμένοι σε ακριβώς 4 πλευρές τους. Ένας γρήγορος τρόπος να το δούμε αυτό είναι να παρατηρήσουμε ότι κάθε μικρός κύβος ακουμπά ακριβώς δύο διπλανούς του. Οπότε δύο πλευρές του είναι άβαφες ενώ οι υπόλοιπες 6-2 = 4 είναι βαμμένες. Με άλλα λόγια η απάντηση στο πρόβλημα είναι ότι 12 (όλοι) οι κύβοι έχουν μπογιά σε τέσσερις πλευρές τους.

19) Γ) 3



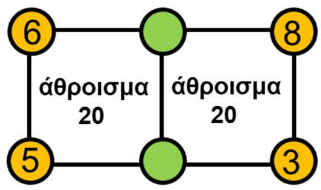
α΄ τρόπος: Στην εικόνα βλέπουμε τα 14 παιδιά που μιλάνε Αγγλικά και τα 9 που μιλάνε Γερμανικά. Παρατηρούμε τρία από τα παιδιά (τα σημειωμένα με κόκκινο χρώμα) βρίσκονται και στις δύο κατηγορίες. Αυτά τα παιδιά μιλάνε και τις δύο γλώσσες.

β΄ τρόπος: Αν δεν υπήρχαν παιδιά που μιλάνε και τις δύο γλώσσες, θα είχαμε συνολικά 14+9 = 23 παιδιά στην τάξη. Αλλά αυτός ο αριθμός είναι κατά 23-20 = 3 μεγαλύτερος από τον πραγματικό. Σημαίνει ότι τα 3 αυτά παιδιά τα διπλομετρήσαμε. Τα διπλομετρημένα παιδιά είναι αυτά που μιλάνε και τις δύο γλώσσες αφού τα μετρήσαμε και σε αυτά που μιλάνε Αγγλικά και σε αυτά που μιλάνε Γερμανικά.

20) Β) 7

Είναι φανερό ότι το πιο μικρό άθροισμα που μπορεί να βρει είναι το 1+2 = 3 και το πιο μεγάλο είναι το 4+5 = 9. Όλα τα άλλα αθροίσματα που μπορεί να βρει είναι ανάμεσα στα δύο αυτά άκρα. Με άλλα λόγια, τα πιθανά αθροίσματα είναι κάποια (ή όλα, αυτό θα το δούμε) από τα 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9. Στην πραγματικότητα μπορούμε να βρούμε ***όλα*** αυτά τα αθροίσματα όπως φαίνεται από τις πράξεις 1+2 = 3, 1+3 = 4, 1+4 = 5, 1+5 = 6 μετά 2+5 = 7, 3+5 = 8 και τέλος 4+5 = 9. Μετρώντας θα δούμε ότι έχουμε 7 διαφορετικά αθροίσματα.

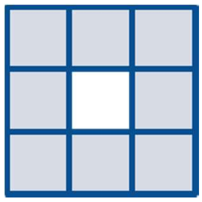
21) Γ) 3



Αφού το άθροισμα των αριθμών στο αριστερό τετράγωνο είναι 20 και αφού το άθροισμα των αριθμών που φαίνονται είναι 6+5 = 11, σημαίνει ότι οι δύο αριθμοί στα πράσινα κυκλάκια έχουν άθροισμα 20-11 = 9.

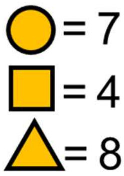
Κοιτάμε τώρα το δεξί τετράγωνο. Ξέρουμε ότι το άθροισμα των αριθμών στα πράσινα κυκλάκια είναι 9, που μαζί με τον 8 στην πάνω δεξιά γωνία έχουν άθροισμα 9+8 = 17. Άρα στην θέση Χ βρίσκεται ο αριθμός 20-17 = 3.

22) Α) 1



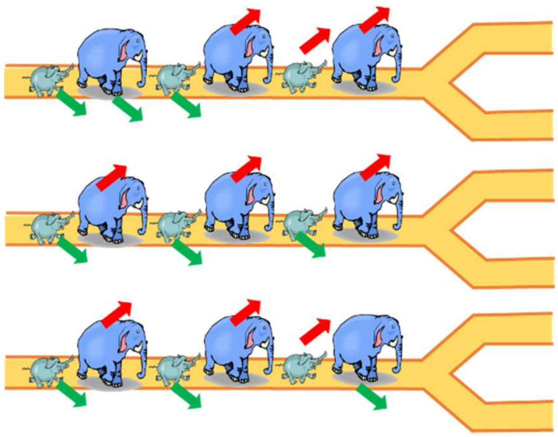
Είναι φανερό ότι όλοι οι κύβοι στον επάνω όροφο της κατασκευής έχουν μπογιά σε κάποιες από τις πλευρές τους. Το ίδιο συμβαίνει με τους κύβους του κάτω ορόφου γιατί έχουν μπογιά τουλάχιστον στον πάτο τους. Μένει να δούμε τι γίνεται με τους κύβους του μεσαίου ορόφου. Αυτοί σχηματίζουν έναν 3x3 τετράγωνο όροφο, όπως στην εικόνα. Από τους κύβους αυτούς, οι οποίοι είναι συνολικά 9, οι 8 έχουν μία πλευρά στο εξωτερικό μέρος της κατασκευής και άρα έχουν μπογιά επάνω τους. Δεν συμβαίνει το ίδιο με τον κύβο στη μέση. Αυτός είναι εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό της κατασκευής, και δεν έχει πάνω του καθόλου μπογιά. Είναι η μοναδική περίπτωση.

23) Δ) 8



Αφού οι αριθμοί στους τρεις κύκλους έχουν άθροισμα 21, σημαίνει ότι στον κάθε κύκλο υπάρχει ο αριθμός 21:3 = 7. Αφού ένας κύκλος και δύο τετράγωνα έχουν άθροισμα 15 σημαίνει ότι τα δύο τετράγωνα έχουν άθροισμα 15-7 = 8 (δηλαδή από το 15 αφαιρέσαμε 7 που περιέχει ο κύκλος). Άρα το κάθε τετράγωνο περιέχει τον αριθμό 8:2 = 4. Τέλος, στην τελευταία πρόσθεση τα δύο τετράγωνα έχουν άθροισμα 4+4 = 8, οπότε το τρίγωνο έχει τον 16-8 = 8.

24) Δ) 3

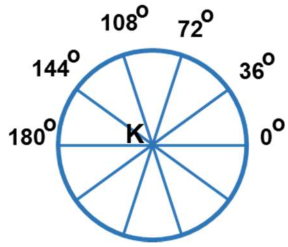


Οι τρεις πρώτες εικόνες είναι πιθανές σωστές φωτογραφίες των ελεφάντων, μετά την διασταύρωση. Αρκεί να διαπιστώσουμε προς τα πού έστριψε ο καθένας. Στην εικόνα δίπλα δείχνουμε με βελάκια την διακλάδωση, προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, που διάλεξε ο κάθε ελέφαντας. Ο αναγνώστης μπορεί να συγκρίνει με τις φωτογραφίες για να διαπιστώσει ότι είναι σωστές. Από την άλλη θα δούμε ότι η τέταρτη εικόνα ***αποκλείεται*** να είναι η σειρά των ελεφάντων μετά την διακλάδωση. Το βλέπουμε αυτό με τον εξής ωραίο συλλογισμό: Ο πρώτος ελέφαντας πριν την διασταύρωση είναι ***μεγάλος***. Αυτός θα πάρει είτε το αριστερό είτε το δεξί μονοπάτι και, εκεί που θα πάει, θα είναι ο πρώτος στην σειρά. Με άλλα λόγια, ***είτε αριστερά είτε δεξιά, ο πρώτος ελέφαντας πρέπει να είναι μεγάλος***. Όμως στην τέταρτη εικόνα βλέπουμε, και στα δύο μονοπάτια, πρώτο στην σειρά ένα μικρό ελεφαντάκι. Άρα η κατάσταση αυτή αποκλείεται. Αν θέλει ο αναγνώστης να δει ένα παρόμοιο πρόβλημα όπου κάποια εικόνα αποκλείεται να είναι σωστή αλλά ***για διαφορετικό λόγο*** από τον παραπάνω, ας κοιτάξει την άσκηση 29 στο Επίπεδο 2 (Ε' και Στ' Δημοτικού).

Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού Επίπεδο 2

1) Α) κανένας
Αφού $10 \times 12 = 120$ και $11 \times 11 = 121$, είναι φανερό ότι δεν υπάρχει φυσικός αριθμός μεταξύ τους.

2) Γ) $Λ\hat{Κ}Γ$
Αφού ο κύκλος χωρίστηκε σε 10 ίσα μέρη, η κάθε γωνία στο σχήμα είναι 360:10 = 36°. Οπότε οι σημειωμένες γωνίες είναι 36°, 2x36° = 72°, 3x36° = 108°, 4x36° = 144° και 5x36° = 180°, αντίστοιχα. Οπότε η γωνία 108° είναι η $Λ\hat{Κ}Γ$.



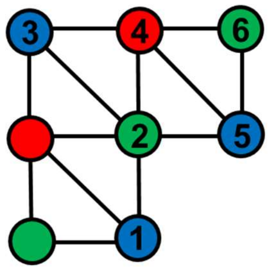
3) Γ) 570
Ένας σωστός αλλά καθόλου σβέλτος τρόπος να λύσουμε το πρόβλημα είναι να βρούμε τους αριθμούς στις απέναντι έδρες και μετά να τους προσθέσουμε. Ο τρόπος αυτός έχει πολλές και κοπιαστικές πράξεις και συγκεκριμένα χρειάζεται να βρούμε το άθροισμα 93+98+99 για τον πρώτο κύβο και το 90+92+98 για τον δεύτερο και μετά να προσθέσουμε τα αθροίσματα (να αιτιολογήσετε). Στα Μαθηματικά, όμως, είναι πλεονέκτημα να βρίσκουμε πιο κομψούς και έξυπνους τρόπους λύσης των προβλημάτων, και αυτό θα κάνουμε εδώ. Θα εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι οι αριθμοί που βλέπουμε στις έδρες είναι μικροί σε αντίθεση με τους αριθμούς στις απέναντι έδρες που είναι σχετικά μεγάλοι. Έχουμε λοιπόν: Αφού οι αριθμοί στα ζευγάρια απέναντι εδρών στον κάθε κύβο είναι 100 και αφού υπάρχουν τρία τέτοια ζευγάρια ανά κύβο (θυμηθείτε, οι κύβοι έχουν 6 έδρες) το άθροισμα των αριθμών σε κάθε κύβο είναι 3x100 = 300. Και στους δύο μαζί το άθροισμα είναι 2x300 = **600**. Από την άλλη, οι ορατοί αριθμοί στον έναν κύβο έχουν άθροισμα 1+2+7 = 10 και στον άλλο 2+8+10 = 20, οπότε όλοι μαζί οι ορατοί αριθμοί έχουν άθροισμα 10+20 = 30. Άρα οι μη ορατοί αριθμοί έχουν άθροισμα το υπόλοιπο, δηλαδή 600 – 30 = 570.

4) Α)
Με λίγο τρισδιάστατη φαντασία μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η αναποδογυρισμένη πινακίδα θα είναι ακριβώς ίδια με την αρχική, δηλαδή η σωστή απάντηση είναι η (Α). Άλλωστε οι άλλες εικόνες μπορούν εύκολα να αποκλεισθούν ακόμη και χωρίς πολύ τρισδιάστατη φαντασία. Για παράδειγμα στις εικόνες (Β) και (Ε) το 6 είναι κοντά στο Χ ενώ στην αρχική πινακίδα ανάμεσα στο 6 και το Χ υπάρχει το 0. Στην πραγματικότητα μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα χωρίς καθόλου φαντασία: ***Ένας πρακτικός τρόπος*** είναι, απλούστατα, να γράψουμε σε ένα χαρτί την πινακίδα, να στρίψουμε το χαρτί μέχρι να γυρίσει ανάποδα και στο τέλος να συγκρίνουμε το αναποδογυρισμένο χαρτί με τις απαντήσεις.

5) Γ) 28
Επειδή η δεύτερη γραμμή περιέχει το 5, σημαίνει ότι στο πάνω δεξιά τετράγωνο πρέπει να υπάρχει το 7 για να είναι σωστός ο πολλαπλασιασμός 5x7 = 35. Άρα στο κάτω δεξιά τετράγωνο πρέπει να υπάρχει ο αριθμός 4x7 = 28. Στην εικόνα βλέπουμε τον πίνακα συμπληρωμένο.

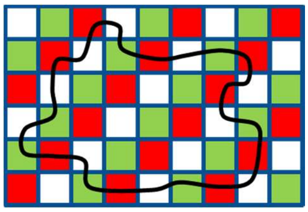
x	3	7
5	15	35
4	12	28

6) Β) μόνο πράσινο



Ο κύκλος που είναι σημειωμένος με τον αριθμό 1 συνδέεται με τον πράσινο και με τον κόκκινο κύκλο, οπότε πρέπει να χρωματιστεί γαλάζιος. Με παρόμοια σκέψη συμπεραίνουμε ότι ο κύκλος με το 2 πρέπει να χρωματιστεί πράσινος αφού συνδέεται με τον κόκκινο και με τον γαλάζιο που μόλις χρωματίσαμε. Συνεχίζουμε με παρόμοιο τρόπο σκέψης. Θα συμπεράνουμε με την σειρά 3, 4, 5 και 6 τα χρώματα των κύκλων, που είναι όπως φαίνονται στην εικόνα. Η επιλογή μας κάθε φορά είναι μοναδική, άρα ο κύκλος που είναι σημειωμένος με το γράμμα Χ (εδώ είναι ο 6), είναι πράσινος και κανένα άλλο χρώμα.

7) Δ) 12

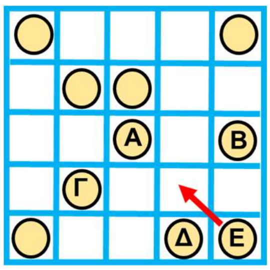


Είναι σχετικά δύσκολο να μετρήσουμε τα πράσινα τετράγωνα που βρίσκονται (ολόκληρα ή ένα τμήμα τους) στο εσωτερικό του περιγράμματος της μελανιάς, γι΄ αυτό κάνουμε έναν ταχύτερο τρόπο: Είναι ευκολότερο να σκεφτούμε πόσα είναι όλα μαζί τα πράσινα τετράγωνα και ***να αφαιρέσουμε εκείνα τα οποία δεν έχουν καθόλου*** μελάνι πάνω τους. Για τον σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι κάθε μία από τις 6 γραμμές του μοτίβου περιέχει ακριβώς 3 πράσινα, 3 λευκά και 3 κόκκινα τετράγωνα. Άρα όλα μαζί τα πράσινα είναι 3x6 = 18. Από την εικόνα (στην εκφώνηση) είναι φανερό ότι 6 πράσινα τετράγωνα είναι καθαρά, χωρίς μελάνι πάνω τους. Άρα τα λερωμένα είναι 18-6 = 12. Για να κάνει επιβεβαίωση ο αναγνώστης, βάλαμε εδώ την αρχική εικόνα αλλά δείχνοντας μόνο το περίγραμμα της μελανιάς.

8) Ε) 4

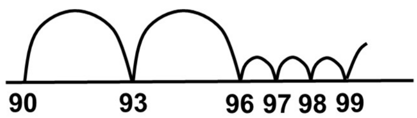
Ψάχνουμε τις ημερομηνίες από το 1822 μέχρι τις μέρες μας που έχουν τρία ίδια ψηφία. Στον αιώνα μας, οι χρονολογίες αρχίζουν με τα ψηφία 20. Άρα τα δύο αλλά επαναλαμβανόμενα ψηφία θα είναι τα 00 ή 22 (και κανένα άλλο ζεύγος) για να συμπληρωθεί τριάδα. Δηλαδή οι χρονολογίες είναι η 2000 και η (γνωστή μας) 2022. Φυσικά το ίδιο μπορούμε άλλωστε να το ελέγξουμε απευθείας με εξέταση των αριθμών από το 2000 έως το 2022. Για τον προηγούμενο αιώνα η αρχή των χρονολογιών είναι 19, οπότε τα άλλα δύο ψηφία είναι τα 11 ή 99 (και κανένα άλλο ζεύγος) δίνοντας τις χρονολογίες 1911 και 1999. Με παρόμοιο συλλογισμό διαπιστώνουμε ότι τον προπροηγούμενο αιώνα έχουμε τις χρονολογίες 1811 και 1888, αλλά μας ενδιαφέρει μόνο η δεύτερη γιατί ψάχνουμε έτη από το 1822 ***και μετά***. Εδώ τελειώνουμε, που σημαίνει ότι έχουμε 4 χρονολογίες με τρία ίδια ψηφία τα τελευταία 200 χρόνια πριν την σημερινή. Από περιέργεια σημειώνουμε ότι η επόμενη φορά που θα συμβεί αυτό είναι το έτος 2111, δηλαδή σε 89 χρόνια.

9) Ε) το Ε



Οι περισσότερες γραμμές και οι περισσότερες στήλες έχουν από δύο κέρματα. Από την άλλη παρατηρούμε ότι η πέμπτη γραμμή και η πέμπτη στήλη έχουν από τρία. Άρα το κέρμα Ε που βρίσκεται και στις δύο αυτές σειρές πρέπει να μετακινηθεί. Πού όμως πρέπει να πάει; Παρατηρούμε ότι η τέταρτη γραμμή και η τέταρτη στήλη έχουν από ένα κέρμα, δηλαδή τους λείπει ένα. Οπότε το Ε πρέπει να πάει στο κοινό τους τετραγωνάκι. Η εικόνα δείχνει την σωστή μετακίνηση.

10) Γ) 93

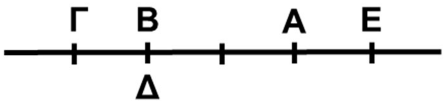


Σε κάθε επανάληψη του μοτίβου, το καγκουρό προχωράει συνολικά 3+3+1+1+1 = 9 μέτρα. Με 10 τέτοιες επαναλήψεις θα βρεθεί στο 90. Σε εκείνο το στάδιο πηγαίνει διαδοχικά στα 90, 93, 96, 97, 98, 99 και λοιπά. Από τους αριθμούς που δίνονται, το καγκουρό θα βρεθεί μόνο στον 93.

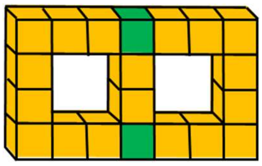
11) Γ) 5 και 8

Το άθροισμα όλων των ηλικιών είναι 2+4+5+6+8+10 = 35. Αφού οι ηλικίες τεσσάρων παιδιών είναι 22, σημαίνει ότι τα άλλα δύο έχουν άθροισμα ηλικιών 35-22 = 13. Από τις ηλικίες (ή τις απαντήσεις) που μας δίνονται, οι μόνες δύο που έχουν άθροισμα 13 είναι οι 5 και 8. Φυσικά αυτό μπορούμε να το ελέγξουμε εξετάζοντας όλες τις περιπτώσεις, όμως ένας γρήγορος τρόπος είναι να απορρίψουμε τις περιπτώσεις όπου αθροίζουμε δύο ζυγούς αριθμούς γιατί αυτοί έχουν άθροισμα ζυγό, δηλαδή όχι 13. Επειδή από τις ηλικίες που δίνονται ο 5 είναι ο μοναδικός μονός αριθμός, είναι φανερό ότι είναι μέρος της απάντησής μας. Ο άλλος φυσικά είναι τότε ο 13-5 = 8.

12) Β) η Βήτα και η Δέλτα

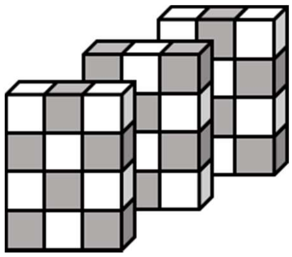


Τοποθετούμε τις γάτες σε μία αριθμογραμμή, ανάλογα με το ύψος τους. Η Άλφα μπαίνει σε κάποιο σημείο, δεν έχει σημασία ποιο. Αφού η Άλφα είναι 2 εκ. πιο ψηλή από την Βήτα, η θέση της Βήτα στην αριθμογραμμή είναι 2 εκ. αριστερότερα της Άλφα. Αφού η Γάμμα είναι 3 εκ. πιο κοντή από την Άλφα, μπαίνει 3 εκ. αριστερότερα της Άλφα, που σημαίνει 1 εκ. πιο πίσω από την Βήτα. Αφού η Δέλτα είναι 1 εκ. πιο ψηλή από την Γάμμα, μπαίνει 1 εκ. δεξιότερα της Γάμμα, δηλαδή ***στο ίδιο σημείο με την Βήτα.*** Αυτό απαντά στο ερώτημα αλλά συνεχίζουμε να δούμε μήπως υπάρχουν και άλλες γάτες με το ίδιο ύψος. Αφού η Δέλτα είναι 3 εκ. πιο κοντή από την Έψιλον, η Έψιλον μπαίνει 3 εκ. δεξιότερα της Δέλτα και μάλιστα ξεπερνά την Άλφα που είναι 2 εκ. πιο ψηλή από την Δέλτα. Τα συμπεράσματα αυτά φαίνονται στο σχήμα, από όπου διαπιστώνουμε ότι το μόνο ζευγάρι με το ίδιο ύψος είναι οι γάτες Βήτα και Δέλτα.



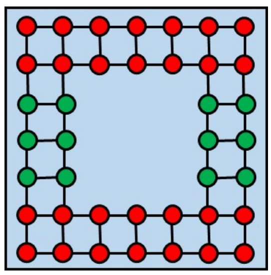
13) Δ) 18

Εξετάζοντας τους μικρούς κύβους της κατασκευής θα διαπιστώσουμε ότι οι κίτρινοι κύβοι στο σχήμα (δηλαδή και οι 18 από τους 20) είναι βαμμένοι σε ακριβώς 4 πλευρές τους. Ένας γρήγορος τρόπος να το δούμε αυτό είναι να παρατηρήσουμε ότι κάθε τέτοιος κύβος ακουμπά ακριβώς δύο διπλανούς του. Οπότε δύο πλευρές του είναι άβαφες ενώ οι υπόλοιπες 6-2 = 4 είναι βαμμένες. Από την άλλη, οι πράσινοι κύβοι ακουμπάνε σε τρεις άλλους, άρα έχουν 3 άβαφες και 3 βαμμένες πλευρές. Με άλλα λόγια η απάντηση στο πρόβλημα είναι ότι 18 κύβοι έχουν μπογιά σε τέσσερις πλευρές τους.



14) Α) 54 γρ.

Η μπροστινή όψη του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου αποτελείται από 3x4 = 12 κύβους από τους οποίους οι 6 είναι λευκοί και οι άλλοι 6 είναι γκρι. Συμβαίνει ακριβώς το ίδιο με τις άλλες δύο φέτες. Ο συνολικός αριθμός των λευκών κύβων είναι 3x6 = 18, και οι γκρι είναι άλλοι τόσοι. Συνεπώς το συνολικό βάρος της κατασκευής είναι 1x18+2x18 = 54 γρ.



15) Β) 40

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να συμπεράνουμε το πλήθος των κύκλων, πέρα από το να τους μετρήσουμε έναν προς έναν. **α΄ τρόπος:** Υπάρχουν 4 οριζόντιες γραμμές των 7 κύκλων (οι κόκκινοι) και ακόμη 4 στήλες των 3 κύκλων (οι πράσινοι). Σύνολο 4x7+4x3 = 4x10 = 40. **β΄ τρόπος:** Αν δεν έλειπε το μεσαίο κομμάτι κύκλων, θα είχαμε συνολικά 7x7 = 49 κύκλους. Αφαιρούμε το μεσαίο κομμάτι, το οποίο θα περιείχε 3x3 = 9 κύκλους. Μένουν 49-9 = 40 κύκλοι.

16) Β) 3

Εφόσον ο μαθητής ήδη έχει διαλέξει τους δύο κύκλους, σημαίνει ότι ήδη έχει διαλέξει ένα κόκκινο και ένα μεγάλο σχήμα. Του λείπει ακόμη ένα κόκκινο και ένα μεγάλο σχήμα. Αν διαλέξει το μεγάλο κόκκινο τρίγωνο θα πετύχει μονομιάς και τα δύο. Οπότε τελικά ***ο μικρότερος αριθμός*** σχημάτων που μπορεί να διαλέξει είναι 3, όπως στην εικόνα. Σε αυτήν την περίπτωση ο ισχυρισμός του ότι έχει ***«δύο κόκκινα σχήματα, δύο μεγάλα και δύο κύκλους»*** είναι σωστός.

17) Ε) 5

α΄ τρόπος: Δεν υπάρχουν τετραψήφιοι αριθμοί με πρώτο ψηφίο κάποιο από τα 1, 2, 3 ή 4 οι οποίοι έχουν άθροισμα ψηφίων ίσο με 32 γιατί το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα ψηφίων τέτοιων αριθμών είναι 4+9+9+9 = 31, δηλαδή μικρότερο του 32. Εξετάζουμε λοιπόν αν το πρώτο μπορεί να είναι 5. Σε αυτή την περίπτωση τα άλλα τρία ψηφία πρέπει να έχουν άθροισμα 32-5 = 27. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε ως 9+9+9, και μόνον έτσι. Άρα ο μοναδικός τετραψήφιος που ξεκινά από 5 και έχει άθροισμα ψηφίων 32, είναι ο 5999. Κάθε άλλος τετραψήφιος με άθροισμα ψηφίων 32 θα έχει πρώτο ψηφίο το 6 ή περισσότερο, και άρα θα είναι μεγαλύτερος από τον 5999. Υπόψη ότι υπάρχουν τέτοιοι, για παράδειγμα οι 6899, 6989, 7889, και λοιπά. Όπως και να είναι, ο μικρότερος είναι ο 5999, με ψηφίο των χιλιάδων το 5.
β΄ τρόπος: Αφού 32:4 = 8, σημαίνει ότι ο αριθμός 8888 είναι πιθανή λύση αλλά εξετάζουμε αν υπάρχουν μικρότεροι αριθμοί με άθροισμα ψηφίων 32. Αρχίζοντας από τον 8888 και μεγαλώνοντας κατά μία μονάδα τα ψηφία στο δεξιό τμήμα του αριθμού και συγχρόνως μικραίνοντας το πρώτο ψηφίο παίρνουμε όλο μικρότερους αριθμούς με άθροισμα ψηφίων 32. Θα βρούμε διαδοχικά τους 7889, 6899, και τελικά 5999. Καταλήξαμε στον μικρότερο, που είναι η απάντηση στο ερώτημα.

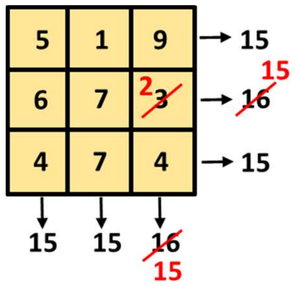
18) Δ) 5

α΄ τρόπος: Κάθε ομάδα παίζει δύο παιχνίδια, ένα με κάθε μία από τις άλλες δύο ομάδες. Τα τελικά αποτελέσματα κάθε ομάδας μπορεί να είναι ένα από τα παρακάτω α) δύο νίκες, β) μία νίκη και μία ισοπαλία, γ) μία νίκη και μία ήττα, δ) δύο ισοπαλίες, ε) μία ισοπαλία και μία ήττα και, τέλος, στ) δύο ήττες. Οι βαθμοί που μαζεύει είναι, αντίστοιχα, α) 3+3 = 6, β) 3+1 = 4, γ) 3+0 = 3, δ) 1+1 = 2, δ) 1+0 = 1 και στ) 0+0 = 0. Συγκρίνοντας με τις απαντήσεις που δίνονται, βλέπουμε ότι όλοι οι βαθμοί είναι πιθανοί, εκτός των 5 βαθμών.
β΄ τρόπος: Σε καθένα από τα δύο ματς που παίζει μία ομάδα, παίρνει 0 ή 1 ή 3 βαθμούς. Δεν υπάρχει τρόπος δύο από αυτούς τους αριθμούς να έχουν άθροισμα 5. Για παράδειγμα αν οι βαθμοί μιας ομάδας είναι και οι δύο 0 ή 1 τότε το σύνολο των βαθμών της θα ήταν το πολύ 1+1 = 2, δηλαδή λιγότερο από 5. Άρα σε κάποιον αγώνα πρέπει να πάρει 3 βαθμούς. Όμως αυτό σημαίνει ότι στον άλλον αγώνα πρέπει να πάρει 5-3 = 2 βαθμούς, αλλά τέτοια βαθμολογία δεν υπάρχει. Άρα οι 5 βαθμοί είναι αδύνατοι. Εύκολα βλέπουμε ότι οι άλλες εκδοχές είναι πιθανές.

19) Α) 2

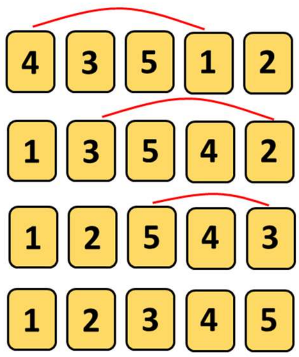
Είναι φανερό ότι το πιο αριστερό ψηφίο του αριθμού που ψάχνουμε πρέπει να είναι όσο μικρότερο γίνεται. Άρα αριστερά πρέπει να μπει η κάρτα με το 118. Μετά είναι φανερό ότι βάζουμε το 3. Αμέσως μετά έχουμε να αποφασίσουμε αν θα βάλουμε το 4 ή το 42. Προτιμούμε το δεύτερο γιατί αν είχαμε το 4, το επόμενο ψηφίο θα έπρεπε να είναι ένα από τα 4 ή 5, πάντως κάτι πιο μεγάλο από το 2. Όμοια τοποθετούμε τις άλλες κάρτες. Θα προκύψει ο αριθμός 11834245657, του οποίου το μεσαίο ψηφίο είναι το 2.

20) Α) τον 3



Τα αθροίσματα των αριθμών στις περισσότερες γραμμές και στήλες είναι 15. Οι εξαιρέσεις είναι η δεύτερη γραμμή και η τρίτη στήλη όπου το άθροισμα είναι 16. Οπότε πρέπει να αλλάξει τον αριθμό που είναι κοινός στις δύο αυτές σειρές, και να τον μειώσει κατά 1. Στην εικόνα φαίνεται η αλλαγή που πρέπει να κάνει.

21) Γ) 3



Καμία από τις κάρτες δεν είναι στην θέση της. Αφού μπορούμε να ανταλλάξουμε την θέση μόνο δύο καρτών τη φορά, σημαίνει ότι χρειαζόμαστε τουλάχιστον τρεις κινήσεις (αφού με δύο δεν πρόκειται να τα καταφέρουμε). Ευτυχώς με τρεις ανταλλαγές, μπορούμε να τα καταφέρουμε. Ένας τρόπος είναι α) να ανταλλάξουμε τις θέσεις των 4 και 1. Μετά β) να ανταλλάξουμε τις θέσεις των 3 και 2 και τέλος, γ) να ανταλλάξουμε τις θέσεις των 5 και 3. Άλλος τρόπος είναι οι αμοιβαίες ανταλλαγές των 1 και 4, μετά των 2 και 5 και τέλος των 2 και 3.

22) Δ) 2 μ.

α΄ τρόπος: Από την πρώτη εικόνα συμπεραίνουμε ότι ο όγκος του νερού είναι ½ x 8 x 4 = 16 κυβικά μέτρα. Ο ίδιος αυτός όγκος, από την δεύτερη εικόνα, προκύπτει από ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με βάση 2 x 4 = 8 τετραγωνικά μέτρα. Άρα το ύψος της στάθμης του νερού είναι 16:8 = 2 μ.

β΄ τρόπος: Από την πρώτη εικόνα βλέπουμε ότι το ύψος της στάθμης του νερού είναι το ¼ του ύψους της δεξαμενής (διότι τα 50 εκ. είναι το ¼ των 2 μ.), που σημαίνει ότι ο όγκος του νερού είναι το ¼ του όγκου της δεξαμενής. Εφόσον το νερό παραμένει το ίδιο, σημαίνει ότι και στην δεύτερη εικόνα η στάθμη του νερού θα είναι το ¼ του ύψους της δεξαμενής. Άρα το ύψος θα είναι το ¼ των 8 μ., που είναι 2 μ.

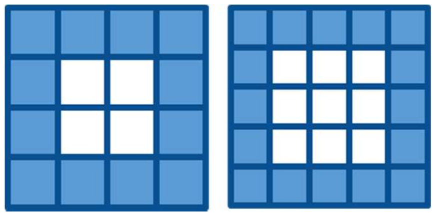
23) Β) 57 εκ.

Η διαφορά ύψους της στοίβας των 3 ποτηριών από την στοίβα των 5 ποτηριών είναι 32-22 = 10 εκ. Αυτή οφείλεται στα 2 παραπάνω ποτήρια που προστέθηκαν, οπότε το κάθε ποτήρι που προσθέτουμε στην στοίβα αυξάνει το ύψος της κατά 10:2 = 5 εκ. Η στοίβα των 10 ποτηριών έχει προσθήκη 7 ποτηριών στην αρχική των 3 ποτηριών. Άρα θα αυξήσει το ύψος της κατά 5x7 = 35 εκ. δηλαδή θα γίνει 22+35 = 57 εκ. Μία παραλλαγή του υπολογισμού του ύψους είναι να ξεκινήσουμε από την δεύτερη στοίβα, των 5 ποτηριών και ύψους 32 εκ. Η στοίβα των 10 ποτηριών έχει προσθήκη 5 ποτηριών, που σε ύψος μεταφράζεται 5x5 = 25 εκ. Συμπεραίνουμε ότι το ύψος της είναι 32+25 = 57 εκ., όσο βρήκαμε πριν. ***Πρόσθετο πρόβλημα:*** Πόσο είναι το ύψος ενός ποτηριού; (Απάντηση: 12 εκ.)

24) Δ) 9

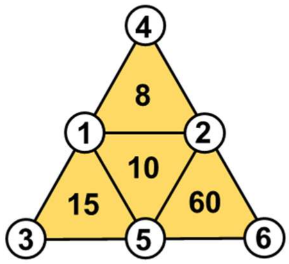
Δεν εργαζόμαστε με δοκιμές. Το κλειδί είναι κάποιες σκέψεις. Το άθροισμα όλων των αριθμών είναι 1+2+3+4+5+6+9+13+17 = 60 κιλά, οπότε κάθε ομάδα πρέπει να αποτελείται από σακιά συνολικού βάρους 60:2 = 20 κιλών. Με ποια βάρη θα πάει το σακί των 17 κιλών; Μας λείπουν 3 κιλά, και ο μόνος τρόπος να πετύχουμε 3 κιλά με τα βάρη που δίνονται, είναι ο 1+2. Οπότε μία ομάδα είναι τα σακιά των 17+1+2 κιλών. Διαγράφουμε αυτά τα βάρη και σκεπτόμαστε τώρα με τα υπόλοιπα, δηλαδή τα 3, 4, 5, 6 και 13 κιλά. Με ποια βάρη θα πάει το σακί των 13 κιλών; Αυτή την φορά μας λείπουν 20-13 = 7 κιλά, και ο μόνος τρόπος να πετύχουμε 7 κιλά με τα βάρη που δίνονται είναι ο 3+4. Οπότε μία δεύτερη ομάδα είναι η 13+3+4. Περισσεύουν τα σακιά των 5, 6, και 9 κιλών, οπότε αυτά είναι η τρίτη ομάδα. Άρα το σακί των 6 κιλών πάει μαζί με των 9 κιλών (και των 5 κιλών).

25) Β) 13



Είναι φανερό ότι όλοι οι κύβοι στον επάνω όροφο της κατασκευής έχουν μπογιά σε κάποιες από τις πλευρές τους. Το ίδιο και οι κύβοι του κάτω ορόφου γιατί έχουν μπογιά τουλάχιστον στον πάτο τους. Μένει να δούμε τι γίνεται με τους κύβους των δύο μεσαίων ορόφων. Αυτοί σχηματίζουν έναν 4x4 και έναν 5x5 τετράγωνο όροφο, όπως στην εικόνα. Στον 4x4 όροφο οι κύβοι έχουν κάποια μπογιά επάνω τους εκτός από τους 4 οι οποίοι βρίσκονται στο κέντρο. Όμοια, οι κύβοι στον 5x5 όροφο που δεν έχουν μπογιά επάνω τους είναι οι 9 κεντρικοί. Άρα οι κύβοι χωρίς καθόλου μπογιά πάνω τους είναι 4+9 = 13.

26) Δ) 13



Από τους αριθμούς που βλέπουμε, μόνο ο 60 είναι πολλαπλάσιο του 6, οπότε ο 6 μπαίνει στην κάτω δεξιά γωνία του τριγώνου (δεν μπορεί να μπει αλλού). Στον κάτω μεσαίο κύκλο πρέπει να μπει κοινός διαιρέτης των 10, 15 και 60, δηλαδή ο 1 ή ο 5. Αλλά δεν μπορεί να μπει ο 1 γιατί στο κάτω δεξιά τρίγωνο (με γινόμενο 60) θα είχαμε τους 1 και 6, οπότε μας λείπει ένα 10 για να έχουμε γινόμενο 60. Αλλά ο 10 δεν είναι μία από τις επιλογές αριθμών που έχουμε. Άρα στον κάτω μεσαίο κύκλο πρέπει να υπάρχει ο 5. Τώρα από το κάτω δεξιό τρίγωνο συμπεραίνουμε ότι στην τρίτη κορυφή του υπάρχει ο 2 για να είναι σωστό το γινόμενο 60 = 2x5x6. Από το μεσαίο τρίγωνο συμπεραίνουμε ότι στην τρίτη κορυφή του υπάρχει ο 1 για να είναι σωστό το γινόμενο 10 = 1x5x2. Εύκολα τώρα συμπληρώνουμε τις άλλες δύο κορυφές, όπως στην εικόνα. Άρα το άθροισμα των αριθμών στις κόκκινες κορυφές του αρχικού σχήματος (τις εξωτερικές) είναι 4+3+6 = 13.

27) Α) 6

1	2	3	
10	9		
11	12		

1	2	3	4
10	9	8	5
11	12	7	6

Πριν μπούμε στις λεπτομέρειες του συλλογισμού, ας επισημάνουμε ότι αν κάποιος βρει με δοκιμές έναν τρόπο να τοποθετήσει τους αριθμούς στον πίνακα, ***δεν σημαίνει*** ότι έλυσε την άσκηση. Για παράδειγμα, αν τοποθετήσει τους αριθμούς όπως στο δεξιό μέρος της εικόνας (που τυχαίνει να είναι ο σωστός), ***δεν βγαίνει*** το συμπέρασμα ότι στην κάτω δεξιά γωνία μπαίνει μόνο ο 6 γιατί απλούστατα ***πρέπει να μας πείσει ότι δεν υπάρχει άλλος τρόπος*** να τοποθετηθούν οι αριθμοί. Με άλλα λόγια, πρέπει να βρει τρόπο να πείσει ότι δεν είναι σωστή η απάντηση (Γ) που λέει «οι 6 και 8 μπορούν και οι δύο». Ας δούμε λοιπόν έναν συλλογισμό που δείχνει ότι υπάρχει μόνος ένας τρόπος να τοποθετηθούν οι αριθμοί: Οι αριθμοί 2 έως 11 έχουν από δύο γειτονικούς, τον προηγούμενό τους και τον επόμενο. Κοιτάμε τώρα το κάτω αριστερά τετράγωνο. Αυτό έχει ακριβώς δύο γειτονικά του τετράγωνα, ένα δεξιά του (που ήδη περιέχει το 12) και άλλο ένα από πάνω του. Άρα σε αυτό το τετράγωνο ***πρέπει να μπει ο 11*** γιατί μόνο αυτός έχει γειτονικό του αριθμό το 12. Συμπεραίνουμε επίσης ότι από πάνω του πρέπει να μπει ο 10 γιατί είναι ό άλλος γειτονικός του αριθμός. Το 10 αυτό έχει τώρα μόνο ένα ελεύθερο γειτονικό του τετράγωνο (δεξιά του) οπότε εκεί ***πρέπει να μπει ο 9***. Τα συμπεράσματα αυτά τα σημειώσαμε με κόκκινο χρώμα στην εικόνα δεξιά. Με παρόμοιο συλλογισμό ***συμπληρώνουμε τους αριθμούς 2 και 3*** στο σχήμα, οι οποίοι είναι υποχρεωτικά εκεί που τοποθετήθηκαν οι πράσινοι αριθμοί. Τώρα ο πίνακας είναι μισοσυμπληρωμένος, όπως δείχνει η αριστερή εικόνα. Σημειώνουμε ότι μέχρι εδώ δεν είχαμε καμία επιλογή των αριθμών που τοποθετήσαμε γιατί όλοι είναι υποχρεωτικά στις συγκεκριμένες θέσεις. Συνεχίζουμε, κοιτώντας την δεξιά εικόνα. ***Ο 8 είναι υποχρεωτικά εκεί που τοποθετήθηκε***. Μετά τον 8 συμπεραίνουμε ότι ***ο 4 είναι υποχρεωτικά εκεί που τοποθετήθηκε*** και κατόπιν ***ο 5 πρέπει να μπει εκεί που τοποθετήθηκε.*** Μένει ο 6, και μόνον αυτός, για το κάτω δεξιά τετράγωνο. Άρα η απάντηση είναι η (Α) 6.

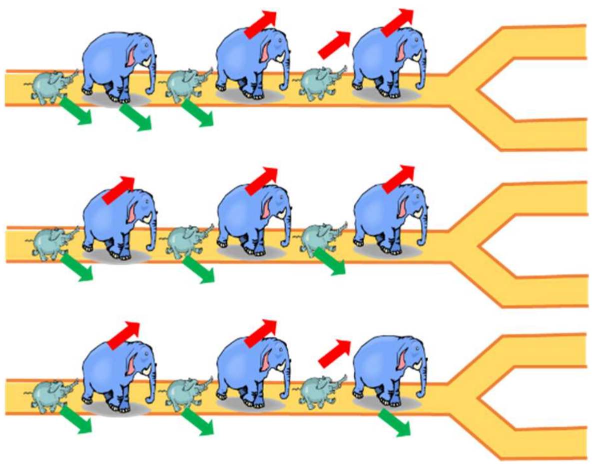
28) Γ) σε 60 λεπτά.

α΄ τρόπος: Αφού η γάτα θέλει 15 λεπτά να κάνει έναν γύρο της λίμνης, σημαίνει ότι σε ένα λεπτό κάνει το $\frac{1}{15}$ της λίμνης. Όμοια, ο σκύλος σε ένα λεπτό κάνει το $\frac{1}{12}$ της λίμνης. Οπότε κάθε λεπτό ο σκύλος προχωράει $\frac{1}{12}-\frac{1}{15}=\frac{5}{60}-\frac{4}{60}=\frac{1}{60}$ της λίμνης μπροστά από την γάτα. Άρα για να βρεθεί ολόκληρο το μήκος της λίμνης μπροστά της (δηλαδή να κάνει έναν παραπάνω γύρο) θέλει 60 λεπτά. Επαλήθευση: Σε 60 λεπτά η γάτα κάνει 60:15 = 4 γύρους και ο σκύλος κάνει 60:12 = 5 γύρους, δηλαδή έναν παραπάνω από την γάτα.

β΄ τρόπος: Η ταχύτητα του σκύλου είναι τα $\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$ της ταχύτητας της γάτας. Άρα όταν η γάτα κάνει έναν γύρο, ο σκύλος θα κάνει $\frac{5}{4}$ της λίμνης, που σημαίνει ότι θα κάνει $\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$ της λίμνης παραπάνω. Οπότε θα χρειαστεί 4 γύρους της γάτας για να την ξαναφτάσει. Αλλά η γάτα χρειάζεται 4x15 = 60 λεπτά για να κάνει 4 γύρους, που είναι η απάντηση στο πρόβλημα.

29) Δ) 3

Οι τρεις πρώτες εικόνες είναι πιθανές σωστές φωτογραφίες των ελεφάντων, μετά την διασταύρωση. Αρκεί να διαπιστώσουμε προς τα πού έστριψε ο καθένας. Στην εικόνα δίπλα δείχνουμε με βελάκια την διακλάδωση, προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, που διάλεξε ο κάθε ελέφαντας. Ο αναγνώστης μπορεί να συγκρίνει με τις φωτογραφίες για να διαπιστώσει ότι είναι σωστές. Από την άλλη θα δούμε ότι η τέταρτη εικόνα ***αποκλείεται*** να είναι η σειρά των ελεφάντων μετά την διακλάδωση. Το βλέπουμε αυτό με τον εξής ωραίο συλλογισμό: Ο τελευταίος ελέφαντας πριν την διασταύρωση είναι ***μικρός***. Αυτός θα πάρει είτε το αριστερό είτε το δεξί μονοπάτι και, εκεί που θα πάει, θα είναι ο τελευταίος στην σειρά. Με άλλα λόγια, ***είτε αριστερά είτε δεξιά, ο τελευταίος ελέφαντας πρέπει να είναι μικρός***. Όμως στην τέταρτη εικόνα βλέπουμε, και στα δύο μονοπάτια, τελευταίο στην σειρά έναν μεγάλο ελέφαντα. Άρα η κατάσταση αυτή αποκλείεται. Αν θέλει ο αναγνώστης να δει ένα παρόμοιο πρόβλημα όπου η κάποια εικόνα αποκλείεται να είναι σωστή αλλά ***για διαφορετικό λόγο*** από τον παραπάνω, ας κοιτάξει την άσκηση 24 στο Επίπεδο 1 (Γ’ και Δ’ Δημοτικού).



30) Δ) 842

Από την πρώτη πληροφορία καταλαβαίνομε ότι το PIN δεν περιέχει τα ψηφία 3, 5, 9. Από την δεύτερη και την τρίτη πληροφορία καταλαβαίνουμε ότι το 7 δεν είναι στο PIN γιατί αν ήταν, οι δύο αυτές πληροφορίες θα ήταν η μία αντίθετη της άλλης. Τώρα από την τρίτη πληροφορία με δεδομένο ότι ξέρουμε πια ότι οι 7 και 5 δεν είναι στο PIN, συμπεραίνουμε ότι το **2** είναι στο PIN και μάλιστα στην σωστή θέση. Δηλαδή ο αριθμός μας έχει την μορφή _ _ **2.** Από την τέταρτη πληροφορία και με δεδομένο ότι το 2 είναι στο PIN και το 7 δεν είναι, συμπεραίνουμε ότι το 8 είναι στο PIN. Αλλά αφού ο 8 είναι στην λάθος θέση, συμπεραίνουμε ότι είναι στην πρώτη θέση, και ο αριθμός μας έχει την μορφή **8** _ **2.** Μένει να βρούμε ποιο είναι το ψηφίο στην μεσαία θέση. Από την δεύτερη πληροφορία δεν μπορεί να είναι το 1 γιατί θα ήταν στην σωστή θέση. Άρα το ψηφίο είναι το 4 (αφού έχουμε ήδη αποκλείσει το 7), οπότε το PIN είναι το **842**.